Univerza v Mariboru
Fakulteta za strojništvo

Jure Ravnik

Metoda robnih elementov za hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev

Doktorska disertacija

Maribor, april 2006

Avtor:	Jure Ravnik
Naslov:	Metoda robnih elementov za hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev
Klasifikacija:	UDK [532:519.61/.64]:004.42(043.3)
Ključne besede:	metoda robnih elementov, valčna transformacija, simulacija velikih vrtincev, hitrostno vrtinčen zapis, računalniška dinamika tekočin, turbulentna naravna konvekcija
Oblikovanje in prelom besedila:	Jure Ravnik z LaTeXom
Število izvodov:	12
Razmnoževanje:	Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru

Faksimile sklepa senata Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru o sprejetju teme doktorske disertacije.

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO
2000 Maribor, Smetanova ul. 17, P.P. 224

Datum: 2. november 2005

TEMA ZA DOKTORSKO DISERTACIJO

Senat Fakultete za strojništvo je na svoji 26. redni seji dne 26. okotbra 2005 v skladu s statutom Univerze v Mariboru

sprejel

temo za doktorsko disertacijo

z naslovom:

"METODA ROBNIH ELEMENTOV ZA HITROSTNO VRTINČNO FORMULACIJO SIMULACIJE VELIKIH VRTINCEV",

ki jo je prijavil

mag. Jure RAVNIK, univ. dipl. fizik

Doktorandovo delo spremlja:

Mentor: **red. prof. dr. Leopold ŠKERGET**
Somentor: **izr. prof. dr. Matjaž HRIBERŠEK**

Rok za oddajo doktorske disertacije v zadostnem številu vezanih izvodov je 4 leta.

UNIVERZA V MARIBORU FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO 10

Dekan:
red. prof. dr. Andrej POLAJNAR

PREJMEJO:
- prof. dr. Škerget
- prof. dr. Hriberšek
- mag. Ravnik J.
- Univerza v Mariboru
- arhiv

Faksimile sklepa senata Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru o imenovanju komisije za oceno doktorske disertacije.

UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

2000 Maribor, Smetanova ul. 17, P.P. 224

Datum: 1. februar 2006

Po sklepu 29. redne seje Senata fakultete za strojništvo z dne 31. januarja 2006 in v skladu s statutom Univerze v Mariboru

i m e n u j e m

KOMISIJO ZA OCENO DOKTORSKE DISERTACIJE

z naslovom:

"METODA ROBNIH ELEMENTOV ZA HITROSTNO VRTINČNO FORMULACIJO SIMULACIJE VELIKIH VRTINCEV"

ki jo je predložil:

mag. Jure RAVNIK, univ. dipl. fizik

v sestavi:

- izred. prof. dr. Jure MARN, predsednik
- red. prof. dr. Leopold ŠKERGET, mentor - član
- izred. prof. dr. Matjaž HRIBERŠEK, somentror - član
- Prof. Dr. Alfredo SOLDATI, član
  Centro Interdipartimentale di Fluidodinamica e Idraulica, Universita degli Studi di Udine, Italija

V skladu s sklepom Senata FS z dne 27. 1. 2004 vsak član komisije napiše ločeno strokovno mnenje. Komisija za oceno disertacije je dolžna praviloma v roku treh mesecev, najpozneje pa v roku šestih mesecev od imenovanja, pregledati disertacijo, podati pisno poročilo o oceni disertacije in ga s svojim predlogom predložiti senatu fakultete.

DEKAN:

red. prof. dr. Andrej POLAJNAR

PREJMEJO:

- prof. dr. Marn
- prof. dr. Škerget
- prof. dr. Hriberšek
- Prof. Dr. Soldati
- mag. Ravnik
- odloga

Izjava

Podpisani Jure Ravnik izjavljam, da:

- je predložena disertacija samostojno delo, ki je bilo opravljeno pod mentorstvom prof. dr. Leopolda Škergeta in somentorstvom prof. dr. Matjaža Hriberška;
- predložena disertacija v celoti ali v delih ni bila predložena za pridobitev kakršnekoli izobrazbe na drugi fakulteti ali univerzi;
- soglašam z javno dostopnostjo disertacije v Knjižnici tehniških fakultet Univerze v Mariboru.

Datum: ______________, Podpis: ______________

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. Leopoldu Škergetu in somentorju prof. Matjažu Hriberšku za strokovno pomoč in nasvete pri izdelavi doktorske disertacije.

Hvala tudi vsem ostalim sodelavcem Inštituta za procesno, energetsko in okoljsko inženirstvo na Fakulteti za strojništvo, Univerze v Mariboru. Predvsem strokovne debate v nam vsem najljubši mesnici, *so odločilno pripomogle pri izdelavi disertacije.*

Del raziskav predstavljenih v disertaciji je bil opravljen pod okriljem programa HPC Europa, ki ga financira Evropska komisija, številka pogodbe 506079. Posebno sem hvaležen sodelavcem dr. Ruprechta iz Univerze v Stuttgardu in ekipi prof. Soldatija in prof. Cominija iz Univerze v Udinah.

Pogovor z dr. Nide G. C. R. Fico, Jr, mi je pomagal pri določitvi robnih pogojev pri toku preko plitve kotanje, z dr. William J. Deckerjem pa sva diskutirala o faznih portretih.

Prav posebej hvala tudi Zoranu, za vse ideje, diskusije, pomoč in dobro voljo.

Hvala tudi Simoni in staršem za vse spodbude in neizčrpno podporo. In hvala Mojci in Vidu, ker sta.

V Mariboru, aprila 2006.

UDK [532:519.61/.64]:004.42(043.3)
Ključne besede: metoda robnih elementov, valčna transformacija, simulacija velikih vrtincev, hitrostno vrtinčen zapis, računalniška dinamika tekočin, turbulentna naravna konvekcija

Metoda robnih elementov za hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev

Povzetek: V delu se posvečamo uporabi metode robnih elementov (BEM) za reševanje toka nestisljive viskozne Newtonske tekočine z uporabo hitrostno vrtinčne formulacije Navier-Stokesovih enačb. Rešujemo sistem nelinearnih enačb za simulacijo turbulentnega toka, ki izvira iz simulacije velikih vrtincev. Enačba kinematike, ki je Poissonovega tipa, povezuje filtrirano hitrostno in vrtinčno polje. Prenos vrtinčnosti stran od sten, kjer nastaja, opisuje difuzivno advektivna enačba. Z vzgonskim členom je povezana z difuzivno konvektivno energijsko enačbo.

Raziskovalci so že pokazali, da lahko laminarni tok viskozne tekočine simuliramo z BEM. Glavna pomanjkljivost te metode je zahteva po shranjevanju velikih, nesimetričnih, polnih matrik integralov, ki izvirajo iz integralskega zapisa enačb. Ker imajo enačba kinematike in obe prenosni enačbi prispevek iz območja, moramo diskretizirati ne samo rob, ampak celotno območje. To pa pomeni, da je potrebno shranjevati veliko število integralov. Velikost matrik z izračunanimi integrali raste s kvadratom števila vozlišč v mreži. Ta pogoj odločilno omejuje velikost mreže.

V disertaciji smo razvili kombinirano metodo, ki jo odlikuje zmanjšana potreba po spominu in natančnost enakega reda. Rob območja izračunamo iz enačbe kinematike z metodo robnih elementov, pri kateri s pomočjo valčne transformacije stisnemo matrike integralov. V ta namen smo razvili diskretno valčno transformacijo za vektorje poljubnih dolžin. Z znanim robom nam ostane problem Dirichletovega tipa za notranjost, kar rešujemo z metodo končnih elementov. Razvita metoda omogoča izvajanje simulacije velikih vrtincev z do $2 \cdot 10^5$ vozlišči na *Gb* računalniškega spomina. Natančnost metode smo potrdili na analitičnih in laminarnih primerih s preverjenimi rešitvami, kot so naravna konvekcija v kotanji, tok v gnani kotanji, tok preko stopnice in tok preko cilindra.

Metodo smo uporabili za ravninsko simulacijo velikih vrtincev v hitrostno vrtinčni formulaciji. Uporabili smo enstrofijski podmrežni model z dušenjem ob stenah. Simulirali smo turbulentno naravno konvekcijo v diferencialno greti kotanji pri visokem temperaturnem gradientu. Drug primer pa je tok preko plitve kotanje z gretim dnom pri visokem Reynoldsovem številu.

UDK [532:519.61/.64]:004.42(043.3)
Keywords: boundary element method, wavelet transform, Large Eddy Simulation, velocity vorticity formulation, computational fluid dynamics, turbulent natural convection

Boundary element Method for Velocity Vorticity based Large Eddy Simulation

Abstract: This work focuses on the use of the boundary element method (BEM) for solving incompressible Newtonian viscous fluid flow problems, using the velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. Solution is obtained by solving the nonlinear system of equations, resulting from the large eddy simulation approach for turbulence modelling. A Poisson type kinematics equation relates the filtered velocity and vorticity fields, while diffusion advection type kinetic vorticity transport equation describes the transport of vorticity from the walls, where it is generated, throughout the flow field. The vorticity transport equation is, through the buoyancy term, connected with the diffusion convection equation for energy transport.

It has already been shown, that laminar viscous flow can be adequately simulated by BEM. The main drawback of the method is the need to store non-symmetrical fully populated matrices of integrals, arising from the integral representations of equations. Since the kinematics, as well as the kinetics equation, have a domain contribution, the domain must also be discretizied and the resulting boundary-domain integral method must store a large number of integrals. The size of matrices of integrals grows with the number of nodes in the mesh squared. This requirement severely limits the mesh size.

We are proposing a combined method with decreased storage requirements and similar accuracy. The kinematics equation is solved for the boundary values by BEM with the large integrals matrices compressed with wavelets. The Haar wavelet transform for vectors of arbitrary length, which was developed for this purpose, is used. With the boundary known, we have a Dirichlet type problem for the kinetics equation, which we solve by the finite element method. The proposed method enables simulation of flow with meshes up to $2 \cdot 10^5$ per Gb. We have been able to confirm the accuracy of the proposed method on laminar benchmark examples such as natural convection in a cavity, lid driven cavity, backward-facing step flow and flow over a cylinder. In order to make use of the wavelet transform compression, a parallel wavelet compression algorithm has been developed with automatic determination of the optimal compression ratio.

The method has been used to simulate a planar LES in velocity vorticity formulation. We used an enstrophy based subgrid scale model with damping in vicinity of walls to obtain a closed system of equations. We simulated turbulent natural convection in a differentially heated cavity at high temperature gradient. The second example investigated was the flow over a shallow cavity with heated bottom at high Reynolds number.

Jure Ravnik

Metoda robnih elementov za hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev

Pullin & Saffman [91]

"Turbulence in real world is almost invariably three-dimensional and can be studied by experiment. Two-dimensional turbulence is a consequence of the construction of large computers. Nevertheless, it is an important research field."

D. Pruett [90]

"A failure to non-dimensionalize lies in the root of many ills in the conventional practise of LES."

Vsebina

Seznam pogosteje uporabljanih oznak

Grške črke

α .... difuzivnost
β_T .... temperaturna razteznost
η .... dinamična viskoznost
Δ .... širina filtra
Γ .... rob
$\vec{\xi}$ .... izvorna točka
λ .... toplotna prevodnost
ν .... kinematična viskoznost
$\vec{\omega}$ .... vrtinčnost
ϖ .... utežna funkcija
Ω .... območje
$\phi_{0,1}$ .... merilni valček
$\psi_{0,1}$ .... osnovni, materinski valček
$\psi_{k,l}$ .... valček reda k in pomika l
Ψ .... vektorski potencial
ρ .... gostota
$\vec{\tau}^{\omega}$ .... rezidualni vrtinčni vektor
$\vec{\tau}^{h}$ .... rezidualni temperaturni vektor
ζ .... prag za zanemarjanje v valčno transformirani matriki

Latinske črke

$\vec{b}$ .... vektor sil
$c(\vec{\xi})$ .... prosti, geometrijski koeficient
c_p .... specifična toplota pri konstantnem tlaku
C .... konstanta modela za podmrežno viskoznost
$G(\vec{r}, \vec{x})$ .... filter
$\vec{g}$ .... gravitacijski pospešek
L, H, W .... dolžinske skale
h .... razmik med vozlišči
k .... valovno število
$\overline{m}$ .... povprečna vrednost absolutnih vrednosti vseh elementov v matriki
p .... tlak
t .... čas
T .... temperatura
u .... funkcija polja
u^* .... fundamentalna rešitev; Greenova funkcija
$\vec{v}$ .... hitrost
W .... matrika valčne transformacije
$\vec{x}, \hat{x}$ .... vektor in njegova valčna transformacija

Operatorji

$\vec{\nabla}$ .... Hamiltonov operator nabla
$\overline{\cdots}$ .... mrežni filter
$\widetilde{\cdots}$ .... testni filter

Kriterialna števila

Re .... Reynoldsovo število
Ra .... Rayleighjevo število
Pr .... Prandtlovo število
Pr_t .... turbulentno Prandtlovo število
Eu .... Eulerjevo število
Pe .... Pecletovo število

Akronimi

BEM .... metoda robnih elementov
DES .... ločena simulacija vrtincev
DNS .... direktna numerična simulacija
FEM .... metoda končnih elementov
LES .... simulacija velikih vrtincev
RANS .... Reynoldsove povprečene Navier-Stokes enačbe
URANS .... nestacionaren RANS
VLES .... simulacija zelo velikih vrtincev

Poglavje 1

Uvod

V zadnji polovici stoletja je prišlo do bistvenega razkoraka s preteklostjo. Vsak izmed nas je odvisen od tehnologije za vzdrževanje našega načina življenja, morda celo življenja nasploh. Dandanes se narodi in velike korporacije lotevajo projektov, katerih velikost in kompleksnost presega sanje prejšnje generacije. Rutinsko uporabljamo naprave, katere naši stari starši primerjajo s čudeži. Hkrati od trga zahtevamo izdelke z vedno boljšim izkoristkom, uporabnostjo in varnostjo za manjši strošek, kar zahteva napredek na vseh področjih znanosti in tehnologije.

Preteklim generacijam je zadostoval proces razvoja s poskušanjem in učenjem na napakah. Glede na zapletenost, velikost in ceno današnjih naprav, je razvoj z izdelavo in preizkušanjem pomanjšanih modelov nemogoč. Preizkušanje in učenje na pravi napravi je velikokrat predrago, vzame preveč časa in je preveč zapleteno, da bi bilo praktično. Potreba po napovedovanju delovanja naprav in možnost izboljšav delovanja za zagotavljanje varnosti, kvalitete in cene je postala ključna za uspešno industrijsko proizvodnjo. Zaradi teh zahtev so raziskave in razvoj na področju matematičnega modeliranja tako nujne.

Točen opis in napovedovanje pojava turbulentnega toka je ena izmed prioritet med inženirji in geofiziki (Härtel, [49]). Razlog za to je preprost. Tok je turbulenten v skoraj vseh praktičnih primerih in močno vpliva na globalne značilnosti pojava, kot so na primer trenje na stenah, prenos toplote, disperzija onesnaževal v toku, potek zgorevalnih procesov, itd. Do danes ni bila odkrita nobena teorija, ki bi napovedovala obnašanje tako raznolikih turbulentnih tokov, zato večino turbulentnih tokov obravnavamo na osnovi teoretičnih in numeričnih približkov.

Splošno je znano in sprejeto, da fiziko laminarnih in turbulentnih tokov opisujejo Navier[1]-Stokesove[2] (Stokes [116]) enačbe. Analitične rešitve teh enačb obstajajo samo za posamezne preproste primere. V praksi jih rešujemo zgolj z numeričnimi metodami. Medtem ko je numerična simulacija laminarnih tokov bolj ali manj enostavna, je numerična obravnava tudi najpreprostejših turbulentnih tokov zelo težavna. Primarni razlog za to je nelinearni značaj Navier-Stokesovih enačb, ki v turbulentnem toku omogoča zelo

[1]Claude-Louis Navier (1785–1836), francoski inženir in fizik

[2]George Gabriel Stokes (1819–1903), angleško-irski matematik in fizik

širok razpon prostorskih in časovnih struktur. Robni pogoji in geometrija toka direktno vplivajo na največje strukture. Njihova oblika se vzdolž toka lahko močno spreminja. Te največje strukture so odgovorne za levji delež turbulentne difuzije, ker nosijo večino turbulentne kinetične energije. Na drugi strani so najmanjše strukture odgovorne za disipacijo kinetične energije toka. Z numerično simulacijo moramo zajeti oba dela, tako difuzijo največjih struktur kot disipacijo zaradi manjših struktur, če želimo, da bo numerična simulacija podala fizikalno opravičljive rezultate.

1.1 Opis problematike in stanja v svetu

Za uspešno simulacijo turbulentnega toka moramo zajeti vse strukture v toku, od najmanjših do največjih. Tak pristop imenujemo direktna numerična simulacija (DNS - *Direct Numerical Simulation*). Število mrežnih točk, ki so potrebne za razločitev vseh struktur, določa razmerje velikosti velikih vrtincev, ki so nosilci večine energije, in najmanjših vrtincev, ki so odgovorni za disipacijo. Zahtevana računalniška moč je s tem direktno odvisna od tega razmerja. Žal je razmerje med največjimi in najmanjšimi strukturami v turbulentnem toku zelo hitro rastoča funkcija Reynoldsovega[3] števila. Danes, kakor tudi v bližnji prihodnosti, je uporaba DNS omejena na tokove pri ne previsokih Reynoldsovih številih in v preprostih geometrijah. Uporablja se v glavnem za raziskave fizike toka, manj pa je uporabna v industriji.

Eden izmed prvih mejnikov uporabe direktne numerične simulacije turbulentnih tokov je bilo delo Kima in sodelavcev [59], ki so spektralno metodo (odvode po kraju so razvili v Fouriereve vrste, oziroma v vrste po Čebišovih polinomih) uporabili za simulacijo toka v kanalu pri $Re = 3200$. Kasneje so se raziskovalci posvetili različnim preprostim oblikam tokov, kot na primer simulacije homogene izotropne turbulence (Vincent in Meneguzzi [135], O'Neill in Soria [83]), kjer so raziskovalci ugotovili organizacijo vrtinčnih struktur v cevaste strukture velikih dolžin s premerom samo nekaj Kolmogorovih[4] dolžin. Veliko pozornosti je posvečeno tudi študiju pojava, ki nastane na stiku med dvema tekočinama z različnima hitrostima ali različnima gostotama. Lesieur et al. [66] ter Moser in Rogers [77] so pokazali, da je parjenje vrtincev en izmed možnih začetkov prehoda v turbulentni režim toka. Veliko zanimanje je bilo izkazano tudi za študij turbulentnega toka v curku (Mathew in Basu [74]). Med geometrično zahtevnejšimi primeri sta najbolj priljubljena turbulenten tok preko stopnice (Le et al. [65]) in tok v cevi z nenadno razširitvijo (Wagner in Friedrich [137]). Posebno vlogo imajo tudi simulacije turbulentnih tokov preko togih teles. Te izvirajo predvsem iz letalske industrije (Shan et al. [110], Breuer [11]).

Uporaba rezultatov direktnih numeričnih simulacij nam omogoča razvoj in preverjanje različnih fizikalnih modelov in numeričnih shem, hkrati pa omogoča tudi študij fizike in pojavov v toku. Soldati s sodelavci [115, 18] uspešno uporablja rezultate DNS za raziskavo obnašanja delcev v turbulentnem toku. Raziskave in razvoj na področju direktne

[3] Osborne Reynolds (1842–1912), irski inženir
[4] Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), ruski matematik

numerične simulacije so izredno raznolike, kar se odraža v velikem številu preglednih člankov (Friedrich et al. [37]).

Za načrtovanje naprav nas največkrat ne zanima časovno odvisno tokovno polje. Velikokrat zadostujejo samo povprečne veličine. Reynolds je predlagal statistični opis turbulentnega toka s tem, da predstavimo poljubno tokovno polje z njegovo časovno povprečno vrednostjo in odmikom od povprečne vrednosti. Ko tak nastavek uporabimo v Navier-Stokesovih enačbah, dobimo t.i. Reynoldsove povprečene Navier-Stokesove (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) enačbe. Sistem enačb RANS je odprt, ker poleg povprečnih veličin, ki jih želimo simulirati, vsebuje tudi korelacije oscilirajočih komponent polj, ki jih moramo modelirati s turbulentnimi modeli. Ti temeljijo na predpostavkah in empiričnih podatkih. Poznamo modele ničtega reda, enoenačbne modele, dvoenačbne modele in druge. Reševanje RANS enačb je prisotno že več desetletij in je, navkljub znanim pomanjkljivostim turbulentnih modelov (Hanjalič [48]), postalo inženirski standard. Vgrajeno je v vse komercialno dostopne programske pakete (glej na primer CFX [1]) in se vsakodnevno uporablja za načrtovanje naprav. Odlikuje ga predvsem preprostost uporabe in zmerne zahteve po računskem času in računalniški opremi.

Poznamo tudi več pojavov, ki so sami po sebi časovno odvisni. Na primer, trganje vrtincev za togim telesom pri višjih Reynoldsovih številih je izrazito časovno odvisen pojav. Za pravilno napovedovanje koeficientov upora in dinamičnega vzgona je potrebno izvesti časovno odvisno simulacijo. V RANS enačbah ohranimo parcialni odvod po času in s tem pridemo do nestacionarne RANS simulacije (*unsteady* RANS oziroma URANS). Z URANS simulacijo dobimo na relativno redkih računskih mrežah časovno odvisne časovno povprečne veličine v tokovnem polju.

Na eni strani imamo torej DNS simulacijo, ki ima izjemne potrebe po računski moči in jo danes uporabljamo samo v raziskovalne namene, na drugi pa RANS simulacijo, ki se dnevno uporablja v inženirstvu. Želja po izboljšanju natančnosti napovedi RANS simulacij in približevanju natančnosti DNS je privedla do razvoja simulacije velikih vrtincev (LES - *Large Eddy Simulation*). Pri LES časovno odvisne Navier-Stokesove enačbe filtriramo s krajevnim filtrom. Ostanejo veliki vrtnici, ki jih simuliramo, najmanjše vrtince pa filter izloči. Njihov vpliv na tok je predvsem energijski. Odgovorni so za disipacijo energije in na tak način jih tudi modeliramo. Podmrežnih modelov, s katerimi opišemo delovanje najmanjših struktur v toku, je več. Najbolj znan in najpogosteje uporabljan je model Smagorinskega [113] in njegova dinamična izpeljanka (Germano [41], Lilly [68]). Ker najmanjših vrtincev ni potrebno simulirati, ne potrebujemo tako goste mreže kot pri izračunih DNS. Kljub temu mora biti mreža še vedno zelo gosta, saj moramo simulirati vrtince, ki nosijo večino kinetične energije. Hkrati moramo uporabiti ustrezen, zelo majhen časovni korak, ki omogoča zadovoljiv opis sprememb v toku. Ker je potrebno simulirati veliko število časovnih korakov, da dobimo statistično reprezentativen vzorec, in ker je mreža še vedno relativno gosta, je računska zahtevnost LES simulacij neprimerno večja od zahtevnosti RANS simulacij. LES simulacije si zato počasi z naraščajočo računsko močjo utirajo pot do inženirskih aplikacij.

V zadnjem času najdemo v literaturi zelo veliko LES člankov. Prve LES simulacije homogene izotropne turbulence so izvedli konec sedemdesetih let prejšnjega stoletja (Chollet in Lesieur [21]). Razvoj turbulentnega toka v kanalu je eden najbolj raziskanih primerov, na katerem se delajo študije uporabnosti različnih podmrežnih modelov (Moin in Kim [76], Piomelli [87]). Simulirajo tudi curke (Ollson in Fuchs [80]), tok preko stopnice (Friedrich in Arnal [36]) in tokove preko togih teles: valja (Breuer [10, 9], Selvam [109], Frölich in Rodi [38]), kvadra (Rodi [102], Kim et al. [58], Bouris in Bergeles [5]), nagnjene plošče (Breuer in Jovičić [12], Breuer et al. [13]). Prav tako je zanimiva turbulentna naravna konvekcija (Xin in Le Quéré [144]).

Dandanes se LES v industriji še ne uporablja množično. Po nekaterih napovedih bo računska moč šele čez dve desetletji dovolj močna za izvedbo LES v vsakdanji inženirski praksi. Ne glede na to se LES uporablja pri simulacijah delovanja in nesreč v jedrskih elektrarnah (Horvat [51]). Letalska (Saulinez et al. [107]) in avtomobilska industrija LES uporabljata predvsem za aerodinamične in akustične preračune.

Potrebna gostota računske mreže za LES narašča z $Re^{0.4}$ v območju daleč od trdnih sten, in z $Re^{1.8}$ ob trdnih stenah (Hanjalič [48]). Za razliko, moramo RANS mrežo zgostiti samo ob trdnih stenah, kjer gostota narašča z $\ln Re$. Z inženirskega stališča se sama po sebi ponuja možnost kombinacije obeh metod. Te t.i. hibridne RANS/LES metode lahko razvrstimo v dve kategoriji.

V prvi kategoriji območje razdelimo na dele, na katerih računamo z RANS in na dele, kjer izvajamo LES simulacijo. Lep industrijski primer take raziskave je vrednotenje hrupa za avtomobilskim ogledalom. Območje okoli ogledala rešujemo z LES. To nam poda nihanje tlaka, ki ga potrebujemo za modeliranje razširjanja zvoka. Tok preko ostalega dela vozila pa modeliramo z RANS. Pri tem pristopu je največja težava modeliranje meje med območjema in določitev robnih pogojev za LES iz RANS rezultatov.

V drugo kategorijo uvrščamo simulacije celega območja z enakim podmrežnim modelom, ki deluje kot RANS v bližini sten in kot LES podmrežni model vstran od sten. V tej kategoriji je najbolj znan pristop Spalartova DES (*Detached Eddy Simulation*) simulacija, pri kateri uporabljamo Spalart-Almaras enoenačbni model za turbulentno viskoznost v obeh režimih (Nikitin et al. [79]). DES je tri-dimenzionalna nestacionarna numerična metoda, ki uporablja samo en turbulentni model. Ta na področjih, kjer je računska mreža dovolj gosta, deluje kot LES podmrežni model, na ostalih delih pa se preoblikuje v RANS simulacijo. Ob trdnih stenah, kjer je turbulentna dolžinska skala premajhna za opis z mrežo, uporabljamo predvsem RANS. Med drugimi sta Viswanathan in Tafti [136] uporabila DES za simulacijo turbulentnega toka in prenosa toplote v orebrenem kanalu. Paterson in Peltier [84] pa sta DES uporabila za napoved trganja vrtincev za ostrim robom.

Poznamo tudi simulacijo zelo velikih vrtincev (VLES *Very Large Eddy Simulation*), pri kateri filter nastavimo tako, da simuliramo res samo zelo velike strukture in modeliramo vse ostalo. Pri VLES modeliranje širšega razpona struktur zahteva bolj napreden model od zgolj energijsko-disipacijskega, ki ga uporabljamo v LES.

Za opis turbulentnega toka je poleg izbire matematičnega modela pomemben tudi sam zapis Navier-Stokesovih enačb. Enačbe opisujejo zakon o ohranitvi gibalne količine. V klasičnem zapisu povezujejo hitrostno in tlačno polje v tekočini. V hitrostno vrtinčni formulaciji, ki smo jo uporabili v disertaciji, je neznanka vrtinčnost (rotor hitrostnega polja). Vrtinčnost se tvori na trdnih stenah in se z difuzijo in advekcijo odvede v tok. Prenosna enačba za vrtinčnost vsebuje difuzijski in advektiven člen ter člen odgovoren za raztegovanje in vrtenje vrtinčnega polja. Slednji je odgovoren za nastajanje prečnih in vzdolžnih vrtincev in nazorno kaže na tri-dimenzionalen značaj turbulence. Zato je za modeliranje turbulentnih tokov upravičena uporaba hitrostno vrtinčne formulacije. Da dobimo zaprt sistem enačb, je zakon o ohranitvi gibalne količine potrebno dopolniti z zakonoma o ohranitvi mase in energije.

Tretji, prav tako pomemben vidik modeliranja turbulentnega toka, je izbira numerične sheme. Včasih najpogosteje uporabljano metodo končnih razlik danes zamenjujeta metodi končnih volumnov in končnih elementov. V zadnjem času pridobiva veljavo tudi metoda robnih elementov (Wu in Thompson [143], Wrobel [142], Škerget et al. [121]), predvsem zaradi večje natančnosti pri računanju strmih profilov tokovnih funkcij. Simulacija velikih vrtincev zahteva časovno odvisen izračun z zelo gosto računsko mrežo in majhnim časovnim korakom. Posledično je potreba po procesorski moči in računalniškem spominu zelo velika. Čeprav je dokazano, da metoda robnih elementov podaja natančnejše rezultate, smo jo v delu morali delno nadomestiti z metodo končnih elementov, ki je iz računskega gledišča manj potratna in zahteva manjšo količino razpoložljivega pomnilnika. Metodo robnih elementov smo, s pomočjo valčne transformacije (Ravnik et al. [96]), uporabili za izračun robnih vrtinčnosti, kjer je nepogrešljiva in je v hitrostno-vrtinčni formulaciji ni mogoče nadomestiti z drugo metodo. Z metodo končnih elementov smo z znanimi vrednostmi na robu izračunali vrednosti v območju.

Ne glede na način modeliranja turbulentnega toka, so v ospredju raziskav vedno tudi napredni paralelni numerični algoritmi. Ti se praviloma izvajajo na vektorskih superračunalnikih, oziroma v zadnjem času na velikih gručah enoprocesorskih računalnikov (Luchini in Quadrio [70]).

Superračunalniki predstavljajo levji delež računske moči za inženirske aplikacije. Nekdaj nedosegljivo dragi sistemi so danes na razpolago tako industrijskim uporabnikom kot raziskovalcem v več deset centrih po svetu. V zadnjem času opažamo dve smeri izgradnje superračunalniških sistemov. Klasičnim vektorskim računalnikom vedno bolj konkurirajo cenejši sistemi, sestavljeni iz gruč poceni (*off the shelf*) računalnikov.

Vektorski računalnik ima več procesorjev, ki imajo hkraten dostop do skupnega spomina. Zasnovani so tako, da je dostop do spomina kar najhitrejši. V praski to pomeni, da imajo zelo veliko zelo majhnih spominskih čipov npr.: (4096 čipov po 8 Mb). Programerski standard za programiranje vektorskih računalnikov je OPEN MP. Programer paralelizira predvsem zanke s posebnimi direktivami prevajalnika. Ko se na vektorskem računalniku paralelen program zažene, v začetku zaseda le en procesor. Ko pa je potrebno izvesti zanko, program uporabi ostale proste procesorje in mednje porazdeli delo. Ker vsi procesorji dostopajo do istega spomina, komunikacija med njimi ni potrebna. Programer mora paziti le na to, da je izvajanje zanke neodvisno. Če tretji procesor potrebuje podatek, ki ga prvi še ni izračunal, je seveda potrebno poskrbeti, da počaka na podatek.

Gruče poceni računalnikov, povezanih med seboj s hitro mrežno povezavo, so resen konkurent vektorskim superračunalniškim sistemom. V tem primeru vsak procesor dostopa samo do svojega spomina, pa še to zelo počasi. Izkaže se, da pri večini matematičnih operacij procesor potrebuje več časa, da pridobi potrebne podatke iz spomina, kot pa da izvede samo operacijo. Hitrega predpomnilnika je odločno premalo, da bi vanj lahko zapisali vse podatke za resen izračun. Procesor na vektorskem sistemu s frekvenco 500MHz računa mnogo hitreje od 3.0GHz procesorja s klasičnim spominom. To predstavlja prvo slabost gruč procesorjev, saj imajo dostop do pomnilnika zelo počasen. Druga slabost gruč poceni računalnikov je prenos podatkov po mreži. Če želimo rešiti nek problem paralelno, je prej ali slej potrebno rezultate, ki jih je izračunal en procesor sporočiti drugim. To pa je navkljub hitrim mrežnim povezavam (Gigabitni ethernet, Myrinet) najožje grlo. Programerski standard za programiranje gruč je MPI [35]. Pri programiranju z MPI ima programer veliko več dela kot pri OPEN MP. Ker se ob zagonu zažene isti program na vseh procesorjih, ki jih nameravamo uporabiti, mora programer ročno poskrbeti za vso komunikacijo in sinhronizacijo med procesorji. Večina gruč deluje pod operacijskim sistemom Linux in za dodeljevanje procesorskega časa uporabnikom uporablja enega izmed programskih paketov. Standard za paralelno programiranje je programski jezik FORTRAN, saj fortranski prevajalniki proizvajajo najhitrejšo kodo.

Numerično modeliranje turbulentnega toka vključuje več poenostavitev in omejitev. V prvi fazi so to predpostavke in omejitve fizikalnega modela. Izbiramo lahko med zelo široko paleto fizikalnih modelov, ki navadno niso splošno in vsestransko uporabni. Tudi numerična shema, ki jo izberemo, ima svoj del slabosti. Navsezadnje je pomemben tudi iterativen algoritem, s katerim rešujemo nelinearnost v sistemu enačb, Napisan mora biti dovolj učinkovito, da privede do rešitve. Samo z uspešno sintezo fizikalnega modela z numeričnim algoritmom lahko zagotovimo uspešno simulacijo turbulentnega toka.

1.2 Struktura doktorske disertacije

Po opisu problematike in stanja v svetu v uvodu nadaljujemo z drugim poglavjem, v katerem vpeljemo hitrostno vrtinčno simulacijo velikih vrtincev. Izpeljemo filtrirane oblike enačbe kinematike, prenosno enačbo za vrtinčnost in energijsko enačbo.

V tretjem poglavju zapišemo diskretno valčno transformacijo za vektorje poljubnih dolžin, ki temelji na Haarovih valčkih. Uporabimo jo za računanje matrično vektorskega produkta s stisnjeno matriko.

V četrtem poglavju se posvečamo numeričnim metodam. Prikažemo metodo robnih elementov za rešitev enačbe kinematike s pomočjo valčne transformacije. Prenosni enačbi za vrtinčnost in temperaturo rešimo z metodo končnih elementov. Ob koncu predstavimo serijski algoritem reševanja, algoritem na podlagi algebrajske paralelizacije in algoritem, ki temelji na paralelizaciji z razdelitvijo območja na dele. Prav tako zapišemo algoritem za paralelno računanje valčno transformirane matrike integralov, ki jo potrebujemo za rešitev enačbe kinematike z metodo robnih elementov.

V petem poglavju dodobra preverimo numerično shemo. Uporabimo analitično rešljive poenostavitve vodilnih enačb in s tem dokažemo pravilnost napisanih podprogramov. Vpliv uporabe stiskanja z valčno transformacijo raziskujemo na primerih laminarnih tokov pri visokih vrednostih kriterialnega števila, za katere poznamo preverjene rešitve.

V šestem poglavju prikazujemo rezultate dveh simulacij. Simulirali smo turbulentno naravno konvekcijo v kotanji pri zelo visoki temperaturni razliki med stenami in tok preko plitve kotanje z gretim dnom.

V sklepnem poglavju povzamemo ugotovitve in podamo smernice za nadaljnje delo.

Ob koncu smo priložili še nekaj kratkih zapisov, ki dopolnjujejo predstavljeno delo. Matematično vpeljemo operacijo filtriranja. Izpeljemo Gaussov in Greenova stavka, povemo nekaj o normali in tangenti. Razložimo in predstavimo tipe in oblike interpolacijskih funkcij, ki jih uporabljamo v izračunih. Povemo tudi nekaj besed o transformaciji koordinatnih sistemov, vpeljemo izstopni robni pogoj in razložimo metodo sledenja brezmasnih delcev v toku. Predstavimo Haarove valčke, fundamentalno rešitev Laplaceove enačbe. Z metodo robnih elementov zapišemo integralsko obliko Poissonove enačbe. Skalarno Poissonovo enačbo in difuzivno advektivno enačbo rešimo z metodo končnih elementov. Razložimo tudi metodo posrednega naslavljanja elementov v matriki.

Poglavje 2

Hitrostno vrtinčna formulacija simulacije velikih vrtincev

2.1 Uvod

Hitrostno vrtinčna formulacija nestisljivih Navier-Stokesovih enačb ima več prednosti pred hitrostno tlačnim zapisom. Z odstranitvijo tlaka iz sistema enačb se izognemo popravljanju le tega med numeričnim algoritmom. Popravljanje je potrebno zaradi povezave med hitrostnim in tlačnim poljem. Hkrati je v hitrostno vrtinčni formulaciji zakon o ohranitvi mase identično izpolnjen in v sistem enačb so implicitno vključeni višje redni približki hitrostnega polja (vrtinčnost).

Simulacija velikih vrtincev je eden izmed mnogih načinov modeliranja turbulentnega toka tekočine. V tem poglavju bomo, preko navedbe gibalnih in ohranitvenih enačb ter klasične hitrostno tlačne simulacije velikih vrtincev, vpeljali hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev.

2.2 Gibalne enačbe

Omejimo se na Boussinesqjev[1] približek tekočine s konstantnimi snovskimi lastnostmi. Obravnavamo nestisljivo viskozno newtonsko tekočino. Predpostavimo konstantno gostoto $\rho = \rho_0$, dinamično viskoznost $\eta = \eta_0$, kinematično viskoznost $\nu = \frac{\eta_0}{\rho_0} = \nu_0$, toplotno prevodnost $\lambda = \lambda_0$, temperaturno razteznost $\beta_T = \beta_0$ in konstantno specifično toploto pri konstantnem tlaku $c_p = c_{p0}$. Z navedenimi omejitvami se zakon o ohranitvi mase zapiše

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \tag{2.1}$$

kjer je $\vec{v}$ hitrost tekočine. Zakon o ohranitvi gibalne količine v Boussinesqjevem približku (Škerget [118]) pa s kinematično viskoznostjo zapišemo takole

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\beta_0 (T - T_0)\vec{g} - \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p + \nu_0 \nabla^2 \vec{v}, \tag{2.2}$$

[1] Valentin Joseph Boussinesq (1842–1929), francoski matematik in fizik

kjer so t čas, p tlak, T temperatura in $\vec{g}$ gravitacijski pospešek. Na levi strani prenos gibalne količine podajata akumulacijski in advektivni člen, na desni pa imamo vzgonski člen, tlačno silo in difuzijski člen. Ohranitev notranje energije zapišemo s temperaturo kot odvisno spremenljivko in difuzivnostjo $\alpha_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p0}}$ takole:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \alpha_0 \nabla^2 T \tag{2.3}$$

in pri tem zanemarimo vire toplote in nepovračljivo viskozno disipacijo.

Eden izmed predpogojev za razvoj uspešne numerične sheme (Pruett [90]) je sprememba vseh veličin in enačb v brezdimenzijsko obliko. Zgornji sistem enačb zapišemo v brezdimenzijski obliki s preslikavami:

$$\vec{v}^* \to \frac{\vec{v}}{v_0}, \vec{r}^* \to \frac{\vec{r}}{L}, \omega \to \frac{\omega L}{v_0}, t^* \to \frac{v_0 t}{L}, T^* \to \frac{T - T_0}{\Delta T}, p^* \to \frac{p}{p_0}, \vec{g}^* \to \frac{\vec{g}}{g_0}, \tag{2.4}$$

kjer so v_0, T_0 in L karakteristična hitrost, temperatura in dimenzija primera. Karakteristična temperaturna razlika je ΔT, medtem ko je $g_0 = 9.81 m/s^2$. Brezdimenzijske veličine smo označili z zvezdico, ki pa jo bomo zaradi preglednosti pisave v nadaljevanju izpuščali. V inženirski praksi si pri problemih iz mehanike tekočin velikokrat pomagamo s podobnostno teorijo in vpeljavo kriterialnih števil. Čeprav je za stabilno numerično shemo pogoj le brezdimenzijska oblika enačb, bomo kriterialna števila uporabili, saj omogočajo preglednejši in preprostejši zapis enačb. Reynoldsovo število definiramo takole:

$$Re = \frac{v_0 L}{\nu_0}. \tag{2.5}$$

Raylieghjevo[2] število je

$$Ra = \frac{g_0 \beta_0 \Delta T L^3}{\nu_0 \alpha_0}. \tag{2.6}$$

Peclejevo[3] število je

$$Pe = \frac{v_0 L}{\alpha_0}. \tag{2.7}$$

Eulerjevo[4] število je

$$Eu = \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0}. \tag{2.8}$$

Prandtlovo[5] število je razmerje med viskoznostjo in difuzivnostjo oziroma razmerje med Peclejevim in Reynoldsovim številom:

$$Pr = \frac{\nu_0}{\alpha_0} = \frac{Pe}{Re}. \tag{2.9}$$

[2]John William Strutt, tretji Baron Rayleigh (1842–1919), britanski fizik
[3]Jean Claude Eugène Péclet (1793–1857), francoski fizik
[4]Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematik in fizik
[5]Ludwig Prandtl (1875–1953), nemški fizik

Z uporabo navedenega se brezdimenzijska prenosna enačba za gibalno količino (2.2) zapiše

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{Ra}{PrRe^2}T\vec{g} - \frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}, \tag{2.10}$$

medtem ko se brezdimenzijska oblika energijske enačbe (2.3) glasi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \frac{1}{RePr}\nabla^2 T. \tag{2.11}$$

Sistem enačb ohranitve mase (2.1), gibalne količine (2.10) in energije (2.11), s podanimi Eulerjevim, Reynoldsovim, Prandtlovim in Rayleighjevim številom popolnoma opisuje nestisljiv tok viskozne Newtonske tekočine in prenos toplote. V primeru simulacije zgolj toka, reševanje enačbe (2.11) ni potrebno. Sistem je zaprt samo s podajanjem Eulerjevega in Reynoldsovega števila. V primerih tokov, kjer karakteristična hitrost ni dobro definirana, npr. pri pojavu naravne konvekcije v diferencialno greti kotanji, izberemo za $v_0 = \frac{\alpha_0}{L}$ in s tem $PrRe = 1$.

2.3 Velikostni redi turbulentnega gibanja

Richardson[6] (1922, [101]) je vpeljal pogled na turbulentni tok preko koncepta energijske kaskade. Turbulenco sestavljajo vrtinci različnih velikosti. Vrtinci veliki l imajo karakteristično hitrost $v(l)$ in časovno skalo $\tau(l) \equiv l/v(l)$. Točne definicije vrtinca ne bomo podali, vendar naj velja, da je to turbulentno gibanje omejeno na območje velikosti l in je vsaj zmerno koherentno v tem območju. Območje v katerem je velik vrtinec, lahko vsebuje tudi manjše vrtince.

Največji vrtinci imajo karakteristično dolžino l_0, ki je primerljiva karakteristični dolžini toka L. Prav tako je karakteristična hitrost $v_0 = v(l_0)$ primerljiva s karakteristično hitrostjo toka. Tako je tudi Reynoldsovo število $Re_0 = \frac{v_0 l_0}{\nu}$ veliko in primerljivo z Re toka. Veliki vrtinci ne občutijo viskoznih efektov zaradi velikega Reynoldsovega števila.

Richardsonova energijska kaskada temelji na predpostavki, da so veliki vrtinci nestabilni in razpadejo in z razpadom prenesejo svojo energijo na malo manjše vrtince. Manjši vrtinci razpadejo na podoben način in tako se energija kaskadno prenaša k manjšim vrtincem. Proces se nadaljuje dokler Reynoldsovo število $Re(l) \equiv \frac{v(l)l}{\nu}$ ne postane dovolj majhno, da je gibanje vrtincev stabilno in molekularna viskoznost efektivno disipira kinetično energijo v toploto. Richardson je proces čudovito povzel

> Vrtinci, veliki, v sebi pa majhne -
> vrtince s hitrostjo svojo rodijo;
> ti majhni še manjše v sebi vrtijo,
> vse do viskoznosti se zavrtijo.

[6] Lewis Fry Richardson (1881–1953), britanski matematik, fizik in psiholog

Ta pogled je pomemben zato, ker postavlja disipacijo na konec procesa. Torej je disipativni tok določen s prvim procesom, s prenosom energije iz največjih vrtincev. Red velikosti energije največjih vrtincev je v_0^2 in časovna skala $\tau_0 = l_0/v_0$, torej je energijski tok iz največjih vrtincev proti manjšim reda velikosti $v_0^2/\tau_0 = v_0^3/l_0$. Posledično je ob koncu kaskade disipativni tok tudi enakega reda velikosti

$$\epsilon \sim \frac{v_0^3}{l_0}, \tag{2.12}$$

kar je bilo eksperimentalno potrjeno (Pope [88]). Vidimo, da pri visokih Reynoldsovih številih, ki jih obravnavamo, disipativni tok ni odvisen od viskoznosti ν. V splošnem so veliki vrtinci anizotropni in odvisni od robnih pogojev toka. Kolmogorov [61, 62] trdi, da se anizotropija izgubi med kaotičnim procesom, s katerim se energija prenaša od velikih proti majhnim vrtincem.

> **Kolmogorova hipoteza o lokalni izotropiji:** Pri dovolj velikih Reynoldsovih številih je turbulentno gibanje na majhni skali ($l \ll l_0$) statistično izotropno.

Prav tako se v energijski kaskadi izgubi informacija o obliki velikih vrtincev, ki jo določa povprečno tokovno polje in robni pogoji. Posledično je statistično gledano gibanje majhnih vrtincev univerzalno - podobno za vsak turbulentni tok pri visokem Reynoldsovem številu. Vpeljimo karakteristično mejo l_{EI} kot razmejitev med anizotropnimi velikimi vrtinci ($l > l_{EI}$) in izotropnimi majhnimi vrtinci ($l < l_{EI}$). Od česa pa je odvisno univerzalno stanje? V energijski kaskadi majhnih vrtincev ($l < l_{EI}$) nastopata dva procesa: energijski tok od večjih vrtincev (E_{EI}) k manjšim in viskozna disipacija, ki jo opiše kinematična viskoznost ν. Disipativni tok ϵ je določen z energijskim tokom E_{EI}. Ti količini lahko v prvem približku izenačimo $\epsilon \approx E_{EI}$.

> **Kolmogorova prva podobnostna hipoteza:** V vsakem turbulentnem gibanju pri dovolj velikih Reynoldsovih številih so statistike na majhni velikostni skali ($l \ll l_0$) univerzalne oblike in določene edinole z viskoznostjo ν in disipacijo ϵ.

Območje karakterističnih dolžin $l < l_{EI}$ imenujemo *območje univerzalnega ravnovesja.* V tem območju so časovne skale $l/v(l)$ majhne v primerjavi z l_0/v_0, tako da se majhni vrtinci lahko hitro prilagajajo in dosegajo dinamično ravnotežje z energijskim tokom E_{EI}, ki ga dovajajo veliki vrtinci na počasnejši časovni skali.

S parametroma ν in ϵ lahko tvorimo karakteristično dolžino, hitrost in čas na samo en način. To so dolžinska, hitrostna in časovna skala Kolmogorova:

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.13}$$

$$v_\eta \equiv (\epsilon\nu)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.14}$$

$$\tau_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Reynoldsovo število, ki ga izračunamo s Kolmogorovo dolžino in hitrostjo, je enako ena; $Re_\eta = \eta v_\eta/\nu = 1$. To je skladno s hipotezo, da energijska kaskada poteka, dokler Reynoldsovo število ni tako majhno, da prevladuje viskozna disipacija.

Razmerja med največjimi karakteristikami in skalami Kolmogorova dobimo z upoštevanjem reda velikosti za disipacijski tok (2.12)

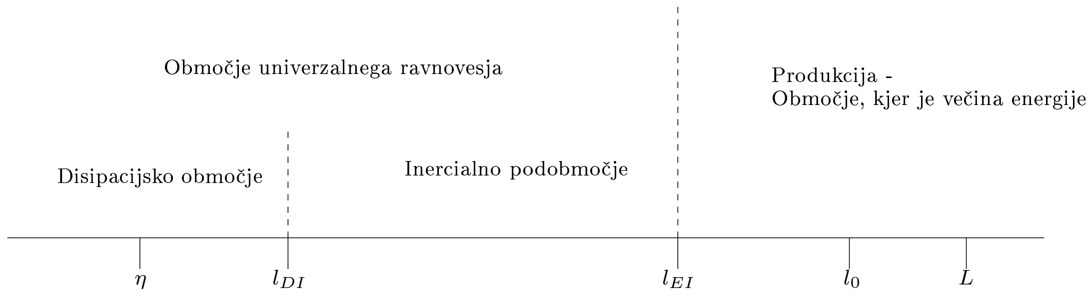
$$\frac{\eta}{l_0} \sim Re^{-3/4}, \tag{2.16}$$

$$\frac{v_\eta}{v_0} \sim Re^{-1/4}, \tag{2.17}$$

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim Re^{-1/2}. \tag{2.18}$$

Očitno so pri visokih Reynoldsovih številih hitrostne in časovne skale najmanjših vrtincev (v_η and τ_η) majhne v primerjavi s skalami največjih vrtincev (v_0 and τ_0). Kot posledica velikega razmerja l_0/η imamo široko paleto vrednosti l, tudi take, ki so hkrati veliko manjše od l_0 in veliko večje od η; $l_0 \gg l \gg \eta$. Vpeljimo l_{DI} (z na primer $l_{DI} = 60\eta$) in razdelimo območje univerzalnega ravnovesja na inercialno podobmočje $l_{EI} > l > l_{DI}$ in na disipacijsko območje $l < l_{DI}$. Obnašanje v inercialnem podobmočju povzema druga podobnostna hipoteza Kolmogorova.

> **Kolmogorova druga podobnostna hipoteza:** V vsakem turbulentnem gibanju pri dovolj velikih Reynoldsovih številih so statistike na dolžinski skali l, $l_{EI} > l > l_{DI}$, univerzalne oblike in določene edinole z viskoznostjo ν in neodvisne od disipacije ϵ.



Slika 2.1: Karakteristične velikosti vrtincev l na logaritemski skali pri zelo visokem Reynoldsovem številu. Povzeto po Sagaut [104].

Turbulentno tokovno polje vsebuje vrtince do najmanjše, Kolmogorove dolžine η. Ko rešujemo Navier-Stokesove enačbe, ki sicer vsebujejo vso fiziko, jih navadno rešimo zgolj na mreži diskretnih vozlišč. Struktur, manjših od razdalj med vozlišči, ne moremo razločiti. Predpostavimo periodično polje $u(x)$, ki ima periodo L. Polje razvijemo v Fourierjevo vrsto takole

$$u(x) = \sum_{n=1-\frac{1}{2}N_{max}}^{\frac{1}{2}N_{max}} c_n e^{ik_n x}, \tag{2.19}$$

kjer je c_n Fourierjev koeficient, ki odgovarja n-te valovnem številu

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}. \tag{2.20}$$

Sodo celo število N_{max} določa največjo razločeno valovno število

$$k_{max} = k_{\frac{N_{max}}{2}} = \frac{\pi N_{max}}{L}. \tag{2.21}$$

V kolikor domeno L diskretiziramo z N_{max} vozlišči, je razdalja med vozlišči $h = \frac{L}{N_{max}}$. Največje razločeno valovno število je torej obratno sorazmerno z razdaljo med vozlišči

$$k_{max} = \frac{\pi}{h}. \tag{2.22}$$

Izotropna turbulenca je primerno razločena, če je $k_{max}\eta \geq 1.5$ (Pope [88]). Ko je mreža redka, turbulence ne moremo razločiti. Zato je koncept simulacije velikih vrtincev v tem, da rešujemo Navier-Stokesove enačbe za krajevno filtrirano polje. Polje filtriramo do take mere, da ohranimo samo valovne vektorje, ki jih z izbrano mrežo lahko popišemo. Filter izloči najmanjše skale $\eta < l < l_{DI}$, ki so odgovorne za disipacijo. Vpliv teh moramo modelirati. Matematično smo operacijo filtriranja vpeljali v prilogi A1 na strani 109. V primeru ostrega spektralnega filtra, ki zaduši vsa nihanja nad kritičnim valovnim številom $k_c = \frac{\pi}{\Delta}$, velja naslednja povezava med širino filtra Δ in razdaljo med vozlišči h

$$k_{max} = \frac{\pi}{h} = k_c = \frac{\pi}{\Delta} \Longrightarrow h = \Delta. \tag{2.23}$$

Za ostale filtre pa lahko posplošimo, da je širina filtra Δ sorazmerna z razdaljo med vozlišči h.

Ocenimo število potrebnih vozlišč v mreži za direktno numerično simulacijo in za simulacijo velikih vrtincev, pri kateri bomo modelirali disipacijsko območje $\eta < l < l_{DI}$. Rezultati so v tabeli 2.1, pri čemer smo uporabili

$$\eta k_{max} \geq 1.5, \qquad l_{DI} k_{max} \geq 1.5 \tag{2.24}$$

in enačbi (2.16), (2.22) ter zveze $N = \frac{L}{h}$. Ko upoštevamo $l_{DI} = 60\eta$ in $L = 5l_0$ lahko pišemo

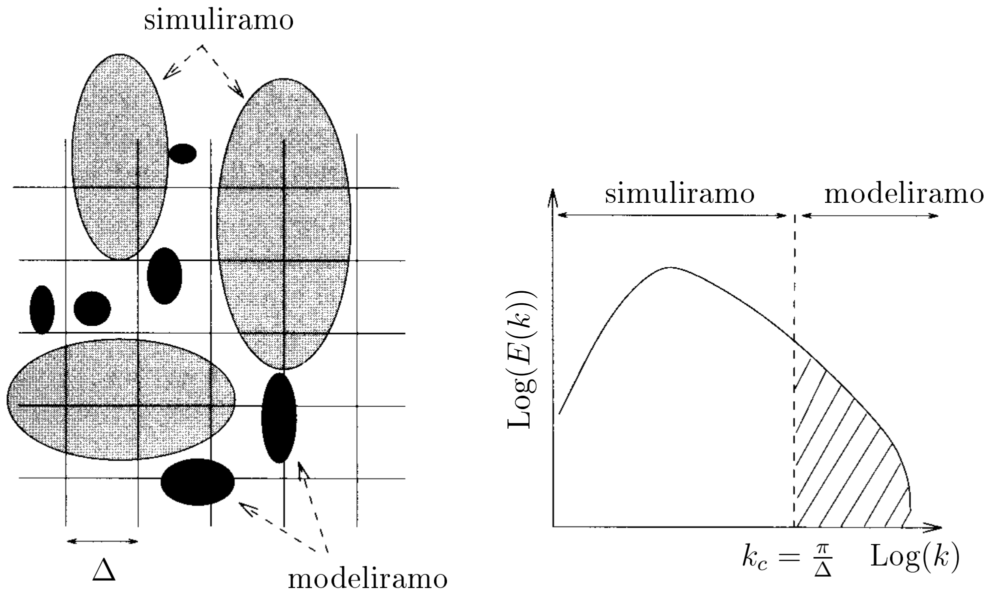
$$N_{DNS} \geq \left(\frac{5 \cdot 1.5}{\pi} Re^{3/4}\right)^3 \approx Re^{9/4}, \qquad N_{LES} \geq \frac{5 \cdot 1.5}{60\pi} Re^{3/4} = \frac{N_{DNS}}{(l_{DI}/\eta)^3}. \tag{2.25}$$

Vidimo, da je za simulacijo velikih vrtincev potrebnih veliko manj vozlišč, kot za direktno numerično simulacijo. Hkrati pa opazimo, da je število vozlišč za LES še vedno zelo veliko.

Sagaut [104] je shematično prikazal učinek filtriranja v fizičnem in spektralnem prostoru (slika 2.2). Izrednega pomena je, da širino filtra in s tem gostoto mreže izberemo tako, da modeliramo res samo disipacijski del spektra. Kasneje, pri izpeljavi prenosnih enačb, se bomo naslonili na to dejstvo in vpliv podmrežnih skal modelirali disipacijsko.

Tabela 2.1: Ocena minimalnega števila vozlišč v mreži, ki omogoča popolen popis turbulentnega toka (N_{DNS}) in število vozlišč, ki zadostuje za simulacijo filtriranega turbulentnega toka (N_{LES}).

Re	N_{DNS}	N_{LES}
10^4	2387^3	40^3
10^5	13425^3	224^3
10^6	75494^3	1258^3



Slika 2.2: Pogled na simulirane in modelirane skale pri simulaciji velikih vrtincev. Povzeto po Sagaut [104].

2.4 Filtrirane gibalne enačbe v hitrostno vrtinčnem zapisu

Gibalne enačbe v t.i. hitrostno-tlačni formulaciji smo predstavili v razdelku 2.2. V tekočini povezujejo hitrostno, tlačno in temperaturno polje. Ta nabor enačb, skupaj z podmrežnim modelom Smagorinskega [113], uporablja veliko število avtorjev pri implementaciji simulacij velikih vrtincev (na primer: Breuer [10], Sohankar [114]). V zadnjem času pridobiva veljavo tudi simulacija velikih vrtincev v hitrostno vrtinčnem zapisu (Tenaud et al. [129], Mansfield et al. [72], Winckelmans et al. [140]), pri kateri zamenjamo prenosno enačbo za gibalno količino s prenosno enačbo za vrtinčnost.

Hitrostno vrtinčno formulacijo Navier-Stokesovih enačb so vpeljali Wu in Thompson [143] ter Škerget et al. [119, 121]. Simulacijo velikih vrtincev za hitrostno vrtinčno fomulacijo bomo izpeljali na podlagi njihove izpeljave hitrostno vrtinčne formulacije iz hitrostno tlačne.

2.4.1 Kinematika nestisljive tekočine

Vrtinčnost je vektor, definiran z rotorjem hitrosti

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \tag{2.26}$$

Enačba ohranitve mase (2.1) in definicija vrtinčnosti (2.26) opisujeta kinematično povezavo med hitrostnim in vrtinčnim poljem (Wu in Thompson [143]). Enačbi sta analogni Maxwellovima[7] enačbama (Strnad [117]), ki povezujeta magnetno poljsko gostoto in stacionarno polje električnega toka: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Čeprav v fiziki navadno govorimo, da električni tok inducira magnetno polje, velja za hitrostno in vrtinčno polje v toku viskozne tekočine samo, da hkrati obstajata.

Glavni razlog za opis toka tekočine s poljem vrtinčnosti je solenoidalnost vrtinčnosti. Solenoidalen vektor ne nastaja ali izginja v notranjosti tekočine, njegova divergenca je enaka nič

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \equiv 0. \tag{2.27}$$

Vrtinčnost nastaja zaradi viskoznosti in samo na robu. Z difuzijo se prenese od roba proti notranjosti tekočine, kjer nastopi difuzijsko-advektivni prenos. Zaradi omejitve na nestisljivo tekočino je hitrostno polje solenoidalno; njegova divergenca je enaka nič. Vsako solenoidalno polje lahko zapišemo kot rotor vektorskega polja $\vec{\Psi}$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}. \tag{2.28}$$

Izberemo lahko solenoidalno vektorsko polje Ψ, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0$. Zgornjo enačbo vstavimo v definicijo vrtinčnosti (2.26) in dobimo

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}) - \nabla^2 \vec{\Psi}. \tag{2.29}$$

[7] James Clerk Maxwell (1831–1879), škotski matematični fizik

Zaradi solenoidalnosti vektorskega polja Ψ, $\vec{\nabla} \cdot \Psi = 0$, lahko enačbo (2.29) prepišemo v

$$\nabla^2 \vec{\Psi} + \vec{\omega} = 0. \tag{2.30}$$

Na obe strani enačbe (2.30) delujmo še z operatorjem rotor in končamo z enačbo kinematike

$$\nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0. \tag{2.31}$$

Dobili smo eliptično vektorsko Poissonovo[8] parcialno diferencialno enačbo, ki povezuje vrtinčno in hitrostno polje za vsako točko v prostoru in času. Enačba je ekvivalenta Biot-Savartovem zakonu, ki povezuje magnetno poljsko gostoto in električni tok. Tako kot sta električni tok in magnetno polje neločljivo povezana, sta tudi hitrostno in vrtinčno polje v tekočini med seboj odvisni (Iftimie et al. [55], Zhou [151], Lundgren [71]).

Pomembno je opozoriti, da enačba (2.31) ni identična enačbama (2.1) in (2.26). To dokažemo, če izberimo skalarno funkcijo f in vektorsko $\vec{F}$ tako, da velja $\vec{\nabla} f + \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Tedaj zlahka pokažemo, da je enačba (2.31) izpolnjena, tudi ko izberemo $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = f$ in $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\omega} + \vec{F}$. Enačba kinematike (2.31) torej dovoljuje rešitve, pri katerih ne zakon o ohranitvi mase (2.1), ne definicija vrtinčnosti (2.26) nista izpolnjeni.

Operacija filtriranja poljubne funkcije $u(\vec{x}, t)$ je definirana z naslednjim konvolucijskim integralom

$$\bar{u}(\vec{x}, t) = \int_\Omega G(\vec{r}, \vec{x}) u(\vec{x} - \vec{r}, t) d\vec{r}, \tag{2.32}$$

kjer je $G(\vec{r}, \vec{x})$ filter, integracija pa poteka po celotnem območju Ω. Izberemo oster spektralni filter $G = \frac{\sin(\pi r/\Delta)}{\pi r}$, ki je normiran in homogen. Zanj velja, da je operacija filtriranja z odvajanjem po času in koordinati komutativna. Filter s širino Δ zaduši vsa valovna števila nad kritičnim $k_c = \pi/\Delta$. Matematično smo operacijo filtriranja podrobneje vpeljali v prilogi A1 na strani 109. Filtrirano količino označimo z vodoravno črto nad njo ($\overline{\ldots}$).

Zakon ohranitve mase (2.1) filtriramo takole

$$\overline{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{v}} = 0. \tag{2.33}$$

Torej pogoj solenoidalnosti velja tudi za filtrirano hitrostno polje $\overline{\vec{v}}$. Na enak način je solenoidalno tudi filtrirano vrtinčno polje $\overline{\vec{\omega}}$

$$\overline{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\right)} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{\omega}} = 0. \tag{2.34}$$

Zaradi komutativnosti homogenega filtra z operacijama odvajanja po koordinati in seštevanja velja enačba kinematike tudi za filtrirano vrtinčno in hitrostno polje

$$\overline{\nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}} = \nabla^2 \overline{\vec{v}} + \vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}} = 0. \tag{2.35}$$

[8]Siméon-Denis Poisson (1781–1840), francoski matematik, geometer and fizik

2.4.2 Prenos vrtinčnosti

Prenosno enačbo za gibalno količino (2.10) bomo preoblikovali v prenosno enačbo za vrtinčnost ter jo filtrirali. Advektivni člen (drugi na člen levi strani enačbe (2.10)) preoblikujemo

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \times \vec{\omega}. \tag{2.36}$$

Ko uporabimo zgornjo enakost (2.36) v enačbi (2.10), dobimo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\frac{Ra}{PrRe^2}T\vec{g} - \frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}. \tag{2.37}$$

Zadnji člen na desni strani enačbe (2.37) je Laplaceov operator, ki deluje na hitrostno polje. Enak izraz nastopa tudi v enačbi kinematike (2.31). Uporabimo jo, da v enačbo vpeljemo rotor vrtinčnosti:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\frac{Ra}{PrRe^2}T\vec{g} - \frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p - \frac{1}{Re}\nabla \times \vec{\omega}. \tag{2.38}$$

Ko na celo enačbo (2.38) delujemo z operatorjem rotor, odpadeta oba gradientna člena. Tako iz enačbe izpade tlak. Če upoštevamo še definicijo vrtinčnosti (2.26), lahko pišemo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -\frac{Ra}{PrRe^2}\vec{\nabla} \times T\vec{g} - \frac{1}{Re}\vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{\omega}). \tag{2.39}$$

Ko enačbo (2.39) filtriramo, lahko zaradi komutativnih lastnosti homogenega filtra zapišemo

$$\frac{\partial \overline{\vec{\omega}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \overline{(\vec{v} \times \vec{\omega})} = -\frac{Ra}{PrRe^2}\vec{\nabla} \times \overline{T}\vec{g} - \frac{1}{Re}\vec{\nabla} \times (\nabla \times \overline{\vec{\omega}}). \tag{2.40}$$

Vidimo, da se nefiltrirana prenosna enačba za vrtinčnost (2.39) razlikuje od filtrirane (2.40) v nelinearnem advektivnem členu. Filter vektorskega zmnožka hitrostnega in vrtinčnega polja ni enak zmnožku filtrov posameznih polj. Simulacija velikih vrtincev predvideva, da je vpliv majhnih skal, ki jih filtriramo, zgolj disipacijski. Enačbo (2.40) bomo zapisali v obliko, ekvivalentno enačbi (2.39), z dodatnim členom, ki bo vseboval razliko. Kasneje bomo dodatni člen modelirali s konstitutivnim modelom tako, da bo prispeval k disipaciji. Vpeljimo torej razliko med filtrom zmnožka hitrostnega in vrtinčnega polja in zmnožkom filtrov posameznih polj kot rezidualni vrtinčni vektor

$$\vec{\tau}^{\omega} = \overline{\vec{v} \times \vec{\omega}} - \overline{\vec{v}} \times \overline{\vec{\omega}}. \tag{2.41}$$

S tem nastavkom lahko prepišemo enačbo (2.40) v

$$\frac{\partial \overline{\vec{\omega}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\overline{\vec{v}} \times \overline{\vec{\omega}}) = -\frac{Ra}{PrRe^2}\vec{\nabla} \times \overline{T}\vec{g} - \frac{1}{Re}\vec{\nabla} \times (\nabla \times \overline{\vec{\omega}}) + \vec{\nabla} \times \vec{\tau}^{\omega}. \tag{2.42}$$

Tako se prenosna enačba za filtrirana polja (2.42) razlikuje od prenosne enačbe (2.39) samo za člen $\vec{\nabla} \times \vec{\tau}^{\omega}$, ki je torej odgovoren za vpliv majhnih skal. Skladno s teorijo o turbulentnem prenosu vrtinčnosti (Taylor [128]) predstavlja ta člen disipacijo vrtinčnosti zaradi majhnih struktur v toku.

Za izpeljavo končne oblike filtrirane prenosne enačbe za vrtinčnost potrebujemo še spodnji vektorski enakosti

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{\omega}}) - \nabla^2 \overline{\vec{\omega}} = -\nabla^2 \overline{\vec{\omega}} \tag{2.43}$$

in

$$\vec{\nabla} \times (\overline{\vec{v}} \times \overline{\vec{\omega}}) = \overline{\vec{v}}(\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{\omega}}) - (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{\omega}} - \overline{\vec{\omega}}(\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{v}}) + (\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} = (\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{\omega}}, \tag{2.44}$$

kjer smo uporabili solenoidalnost hitrostnega in vektorskega polja (divergenci sta enaki nič). Končen zapis filtrirane enačbe prenosa vrtinčnosti je

$$\frac{\partial \overline{\vec{\omega}}}{\partial t} + (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{\omega}} = (\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \frac{Ra}{Pr Re^2} \vec{\nabla} \times \overline{T} \vec{g} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \overline{\vec{\omega}} + \vec{\nabla} \times \vec{\tau}^{\omega}. \tag{2.45}$$

Enačba (2.45) pove, da je hitrost spreminjanja vrtinčnosti, ko sledimo delcu tekočine (podana s Stokesovim odvodom na levi strani enačbe), odvisna od viskozne difuzije, vzgona, prispevka majhnih skal in člena $(\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}}$, ki predstavlja raztegovanje in vrtenje vrtinčnega polja. Difuzijski člen je analogen difuzijskemu členu v enačbi za prenos gibalne količine (2.10). Člen $(\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}}$ ima vpliv v primerih, ko se hitrost spreminja vzdolž vrtinčnic. Pri obravnavi primerov ravninskega toka (v dveh dimenzijah) ima vektor vrtinčnosti samo eno komponento različno od nič. Takrat je enačba prenosa vrtinčnosti skalarna. Člen $(\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}}$ odpade, ker sta vektorja hitrosti in vrtinčnosti pravokotna. Enačba prenosa vrtinčnosti je vedno nelinearna, ker v njej nastopa produkt vektorjev vrtinčnosti $\overline{\vec{\omega}}$ in hitrosti $\overline{\vec{v}}$, ki sta kinematično odvisni veličini (enačba (2.35)). Preko vzgonskega člena, ki vsebuje temperaturo, je enačba prenosa vrtinčnosti vezana na energijsko enačbo.

2.4.3 Energijska enačba

Ko filtriramo energijsko enačbo (2.11), naletimo, podobno kot pri prenosni enačbi za vrtinčnost, na težave pri nelinearnem konvekcijskem členu. Zaradi lažje vpeljave rezidualnega temperaturnega vektorja bomo konvektivni člen v energijski enačbi najprej preoblikovali s pomočjo naslednjega izraza

$$\vec{\nabla} \cdot (T\vec{v}) = T(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T, \tag{2.46}$$

kjer zadnja enakost velja, ker je hitrostno polje solenoidalno. Ko enakost (2.46) vstavimo v energijsko enačbo (2.11)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{v}) = \frac{1}{RePr} \nabla^2 T, \tag{2.47}$$

jo preoblikujemo v obliko, ki je primerna za filtriranje. Po uporabi filtra dobimo:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{T\vec{v}}) = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \overline{T}. \tag{2.48}$$

Z vpeljavo temperaturnega rezidualnega vektorja nelinearni člen preoblikujemo v

$$\vec{\tau}^h = \overline{T\vec{v}} - \overline{T}\,\overline{\vec{v}}. \tag{2.49}$$

Končna oblika filtrirane energijske enačbe je

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\overline{T}\,\overline{\vec{v}}) = \frac{1}{RePr}\nabla^2 \overline{T} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}^h. \tag{2.50}$$

2.4.4 Tlačna enačba

V hitrostno vrtinčnem zapisu tlak ne nastopa v sistemu enačb. Izračunamo ga po končanem izračunu iz filtriranih polj. Uporabimo prenosno enačbo za gibalno količino (2.10), iz katere izrazimo gradient tlaka:

$$\vec{\nabla}\overline{p} = Eu\left\{-\frac{\partial \overline{\vec{v}}}{\partial t} - (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \frac{Ra}{PrRe^2}\overline{T}\vec{g} + \frac{1}{Re}\nabla^2 \overline{\vec{v}}\right\}. \tag{2.51}$$

S pomočjo enačbe kinematike (2.35) Laplaceov operator na hitrostno polje v enačbi (2.51) izrazimo z rotorjem vrtinčnega polja

$$\vec{\nabla}\overline{p} = Eu\left\{-\frac{\partial \overline{\vec{v}}}{\partial t} - (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \frac{Ra}{PrRe^2}\overline{T}\vec{g} - \frac{1}{Re}\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}\right\} \equiv \vec{f}_p, \tag{2.52}$$

kjer smo zaradi preglednosti nadaljnjih izpeljav gradient tlaka imenovali $\vec{f}_p$. Na enačbo (2.52) delujemo z operatorjem divergence in jo s tem preoblikujemo v eliptično enačbo Poissonovega tipa

$$\nabla^2 \overline{p} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_p. \tag{2.53}$$

2.5 Modeli

V filtriranih prenosnih enačbah nastopata rezidualna vektorja, ki opisujeta dogajanje v turbulentnem toku, katerega ne moremo opisati z izbrano gostoto računske mreže. Ta vpliv je potrebno modelirati.

Hipoteza 1 *Vpliv toka, ki ga ne razločimo z dano računsko mrežo, na tok, ki ga razločimo, je energijski. Za opis delovanja podmrežnih struktur toka na simuliran tok je dovolj poznati energijsko bilanco.*

S hipotezo 1 zanemarimo del informacije o podmrežnih strukturah, kot je anizotropija. Energijski prenos se odvija v obeh smereh, od velikih vrtincev proti malim, podmrežnim, in obratno. Prenos energije od malih skal proti velikim je občutno manjši kot prenos energije od velikih proti malim (Sagaut, [104]). Mehanizem prenosa energije iz velikih vrtincev proti majhnim opišemo z vpeljavo koncepta podmrežne viskoznosti.

Hipoteza 2 *Prenos energije od velikih proti malim vrtincem je analogen molekularnim mehanizmom, ki jih opisuje difuzijski člen, v katerem nastopa molekularna viskoznost ν.*

Hipoteza 2 pove, da je obnašanje podmrežnih vrtincev analogno Brownovem gibanju, ki je superponirano gibanju velikih vrtincev. V kinetični teoriji plinov molekularno gibanje jemlje energijo toku s pomočjo molekularne viskoznosti. Torej bomo energijski prenos modelirali analogno, namesto molekularne viskoznosti bomo uporabljali podmrežno viskoznost in difuzivnost. Vpeljimo brezdimenzijsko podmrežno viskoznost $\nu_{sgs} \to \frac{\nu_{sgs}}{v_0 L} = Pr\frac{\nu_{sgs}}{\nu_0}$ in podmrežno difuzivnost $\alpha_{sgs} = \frac{\alpha_{sgs}}{\alpha_0}$ s

$$\vec{\tau}^{\omega} = -\nu_{sgs}\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}, \qquad \vec{\tau}^{h} = -\alpha_{sgs}\vec{\nabla}\overline{T}. \tag{2.54}$$

Izbira modela za podmrežno viskoznost je predmet raziskav zadnjih nekaj desetletij (Winckelmans et al. [140]). V preteklem stoletju je bil največkrat uporabljen model Smagorinskega [113], ki v filtrirani enačbi za prenos gibalne količine povezuje rezidualni napetostni tenzor preko konstante in širine filtra z lokalno deformacijsko hitrostjo. Izdelanih je bilo več analiz delovanja modela (npr.: Rogallo in Moin [103], ter Lesieur et al. [67]), kjer je kot glavna slabost modela predstavljena konstanta, ki ni stalna, temveč je odvisna od tokovnega polja in robnih pogojev. Predvsem v bližini sten (Breuer [11]) je potrebno konstanto zmanjšati, da zagotovimo izničenje podmrežne viskoznosti na stenah. V izogib konstanti in dušenju ob stenah je Gremano et al. [41] predlagal dinamično določitev konstante na podlagi testnega filtriranja polja in primerjave z mrežnim filtrom. Postopek je nadalje izboljšal Lilly [68].

Za hitrostno vrtinčno formulacijo bolj zanimiv model temelji na lokalni enstrofiji velikih skal (Mansour et al. [73]). Podmrežno viskoznost zapišemo takole:

$$\nu_{sgs} = (C\Delta)^2\sqrt{\overline{\vec{\omega}} \cdot \overline{\vec{\omega}}}. \tag{2.55}$$

Uporabljali bomo oster spektralni filter. Zanj velja $\Delta = (\Delta_x\Delta_y\Delta_z)^{\frac{1}{3}}$ v treh in $\Delta = (\Delta_x\Delta_y)^{\frac{1}{2}}$ v dveh dimenzijah. V bližini sten bomo konstanto modela C dušili s Piomellijevo d_P oziroma Van Driestovo d_{vd} dušilno funkcijo (Breuer [11])

$$d_P = \sqrt{1 - e^{\left[\frac{-y^+}{25}\right]^3}}, \quad d_{vd} = 1 - e^{\left[\frac{-y^+}{25}\right]}; \quad \nu_{sgs} = (C\Delta d_P)^2\sqrt{\overline{\vec{\omega}} \cdot \overline{\vec{\omega}}}, \tag{2.56}$$

kjer smo zidni koordinatni sistem (x^+,y^+,z^+) podrobneje definirali v prilogi A8 na strani 121.

Rezidualni temperaturni vektor $\vec{\tau}^h$ deluje kot gostota difuzijskega toplotnega toka, ki jo je mogoče aproksimirati z vpeljavo turbulentne toplotne difuzivnosti (2.54). Na podlagi eksperimentalnih spoznaj, ki jih je opisal Hinze [50] in uporabil Horvat [51] sledi, da je turbulentna viskoznost izotropne turbulence ν_{sgs} primerljiva s turbulentno toplotno difuzivnostjo za celotni turbulentni spekter. Njun odnos pa je blizu linearne odvisnosti:

$$\alpha_{sgs} = \frac{\nu_{sgs}}{Pr_t}, \tag{2.57}$$

kjer je Pr_t empirično izbrano turbulentno Prandtlovo število.

2.5.1 Dinamično določanje konstante modela

Ena glavnih omejitev modela Smagorinskega je dejstvo, da je konstanta C različna za različne režime toka. Na primer, v primeru laminarnega toka je enaka nič, v bližini zidov je v primerjavi s teoretično vrednostjo za prosto turbulenco pri visokem Re številu $C = 0.15$ zadušena (Pope [88]). Dinamični model vpeljuje metodologijo za dinamično določitev konstante. Tako postane konstanta odvisna od kraja in časa v toku. Dinamični model za konstantno v modelu Smagorinskega je prvi predlagal Germano [41] in dopolnil Lilly [68]. Kasneje se je s problematiko ukvarjalo več avtorjev (Davidson [27], Scotti et al. [108]) med drugim tudi z uporabo vrtinčnosti kot izvora podmrežne disipacije (Dantinne et al. [24], Bergstrom in Wang, [3]). Delovanje in uporabnost so pokazali na več testnih primerih (Meneveau in Katz, [75]). Carati s sodelavci [19] je uporabil ansambelsko povprečje v homogenih smereh za umirjanje hitrega spreminjanja vrednosti dinamično določene konstante. Poseben poudarek je bil na problematiki toka ob trdnih stenah, kjer se mora vrednost konstante pravilno približati ničli (Collis in Chang [22]).

Načelno sledimo Germano-Lilly [41, 68] izpeljavi. Vendar jo bomo uporabili na vrtinčnem rezidualnem vektorju namesto na rezidualnem tenzorju, kot sta to naredila avtorja.

Pri izpeljavi metode velikih vrtincev smo uporabili filter s širino Δ, ki je bila določena z razmikom vozlišč na računski mreži. Naj bo to mrežni filter. S simulacijo velikih vrtincev računamo funkcije polja filtrirane z mrežnim filtrom. Označimo jih s $\overline{u}$. Vpeljimo še testni filter, ki naj ima širino $\tilde{\Delta}$ večjo od širine mrežnega filtra $\tilde{\Delta} > \overline{\Delta}$. Numerični testi so pokazali, da je najugodneje uporabiti testni filter z dvakrat večjo širino kot mrežni filter.

Zapišimo rezidualni vrtinčni vektor za mrežni filter

$$\vec{\tau} = \overline{\vec{v} \times \vec{\omega}} - \overline{\vec{v}} \times \overline{\vec{\omega}} \tag{2.58}$$

in za testni filter

$$\vec{T} = \widetilde{\overline{\vec{v} \times \vec{\omega}}} - \tilde{\overline{\vec{v}}} \times \tilde{\overline{\vec{\omega}}}. \tag{2.59}$$

Vpeljimo Germanov vektor [40] kot razliko med rezidualnima vrtinčnima vektorjema obeh filtrov

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{T} - \tilde{\vec{\tau}} = \widetilde{\overline{\vec{v}} \times \overline{\vec{\omega}}} - \tilde{\overline{\vec{v}}} \times \tilde{\overline{\vec{\omega}}}. \tag{2.60}$$

Germanov vektor znamo izračunati, saj so $\overline{\vec{v}}$ in $\overline{\vec{\omega}}$ rezultati simulacije velikih vrtincev. Za izračun $\vec{\mathcal{L}}$ jih je potrebno samo filtrirati s testnim filtrom.

Po drugi strani pa z vrtinčnim podmrežnim modelom zapišemo rezidualna vektorja takole

$$\vec{\tau} = -C_D \Delta^2 \sqrt{\overline{\vec{\omega}} \cdot \overline{\vec{\omega}}} \vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}, \tag{2.61}$$

$$\vec{T} = -C_D \tilde{\Delta}^2 \sqrt{\tilde{\overline{\vec{\omega}}} \cdot \tilde{\overline{\vec{\omega}}}} \vec{\nabla} \times \tilde{\overline{\vec{\omega}}}, \tag{2.62}$$

kjer smo vpeljali dinamični koeficient C_D, ki je odvisen od kraja in časa. Z izrazoma (2.61) in (2.62) še enkrat zapišemo Germanov vektor

$$\vec{\mathcal{L}'} = \vec{T} - \tilde{\vec{\tau}} = C_D \left(\widetilde{\Delta^2 \sqrt{\overline{\vec{\omega}} \cdot \overline{\vec{\omega}}} \vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}} - \tilde{\Delta}^2 \sqrt{\tilde{\overline{\vec{\omega}}} \cdot \tilde{\overline{\vec{\omega}}}} \vec{\nabla} \times \tilde{\overline{\vec{\omega}}} \right) = C_D \vec{M}. \tag{2.63}$$

Ko izenačimo izraza za Germanov vektor v enačbah (2.60) in (2.63)

$$\vec{\mathcal{L}} = C_D \vec{M}, \tag{2.64}$$

vidimo, da je nemogoče z eno konstanto zagotoviti enakost. Lilly [68] je predlagal minimiziranje napake v smislu kvadratne norme z vpeljavo rezidualnega vektorja $\vec{R}$

$$\vec{R} = \vec{\mathcal{L}} - C_D \vec{M}, \tag{2.65}$$

ki ga minimiziramo s stavkom

$$\frac{\partial \vec{R} \cdot \vec{R}}{\partial C_D} = 0. \tag{2.66}$$

Z uporabo definicij (2.65), (2.63) in (2.60) hitro pokažemo, da napako v kvadratnem smislu minimizira

$$C_D = \frac{\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{M}}{\vec{M} \cdot \vec{M}}. \tag{2.67}$$

Oba vektorja $\vec{\mathcal{L}}$ in $\vec{M}$ lahko izračunamo s filtriranjem vrtinčnega in hitrostnega polja s testnim filtrom. Edini parameter, ki nastopa pri izračunu C_D, je razmerje med širinama mrežnega in testnega filtra. Avtorji Pope [88], Sagaut [104] navajajo vrednost 2 kot optimalno.

Koeficient C_D, izračunan iz enačbe (2.67), zelo hitro spreminja vrednost s krajem in dovoljuje tudi negativne vrednosti. Negativne vrednosti opisujejo prenos energije v obratni smeri kaskade. Obe lastnosti usodno poslabšata stabilnost simulacije. Zato avtorji predlagajo povprečevanje izraza (2.67)

$$C_D = \frac{< \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{M} >}{< \vec{M} \cdot \vec{M} >} \tag{2.68}$$

po homogenih smereh v toku (np. vzdolž sten) in umetno postavljanje negativnih vrednosti C_D na nič.

Za numerično implementacijo testnega filtra (Davidson [27], Sagaut in Grohens [105], Winckelmans [141]) je v načelu potrebno ovrednotiti integral (A1.1) z dvojno širino filtra. Ker je to potrebno narediti za vse točke v območju in za več funkcij polja, je izvedba pravega integrala računsko zelo potratna. Davidson [27] predlaga ovrednotenje integrala s približkom - danem vozlišču pripišemo povprečno vrednost izračunano iz vseh sosednjih vozlišč. Tak pristop smo ubrali tudi mi.

2.6 Sistem enačb

Ob koncu poglavja naj si bralec opomore ob branju kratkega razdelka, v katerem bomo ponovno navedli sistem enačb in modele, ki sestavljajo hitrostno vrtinčno simulacijo velikih vrtincev, ki jih bomo nadalje reševali. Sistem sestavljajo filtrirana enačba kinematike (2.69) in prenosni enačbi za vrtinčnost (2.72) in temperaturo (2.73).

Enačbo kinematike, ki povezuje hitrostno in vrtinčno polje za vsako točno v kraju in času, zapišemo takole

$$\nabla^2\overline{\vec{v}} + \vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}} = 0. \tag{2.69}$$

V filtrirani enačbi prenosa vrtinčnosti (2.45) nastopa rotor modela za podmrežno viskoznost. Ovrednotimo ga s pomočjo nastavka (2.54) in dobimo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\tau}^{\omega} = \vec{\nabla}(-\nu_{sgs}\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) = -\nu_{sgs}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) + (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) \times \vec{\nabla}\nu_{sgs}. \tag{2.70}$$

Za zgornje izvajanje smo uporabili pravilo za rotor produkta skalarnega in vektorskega polja (Škerget [118]). Uporabimo še enakost (2.43) in končamo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\tau}^{\omega} = \nu_{sgs}\nabla^2\overline{\vec{\omega}} + (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) \times \vec{\nabla}\nu_{sgs}. \tag{2.71}$$

V filtrirano enačbo prenosa vrtinčnosti (2.45) vstavimo model za podmrežno viskoznost (2.71) in dobimo

$$\frac{\partial\overline{\vec{\omega}}}{\partial t} + (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{\omega}} = (\overline{\vec{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \frac{Ra}{PrRe^2}\vec{\nabla} \times \overline{T}\vec{g} + \left(\frac{1}{Re} + \nu_{sgs}\right)\nabla^2\overline{\vec{\omega}} + (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{\omega}}) \times \vec{\nabla}\nu_{sgs}. \tag{2.72}$$

Ko vstavimo model za rezidualni vrtinčni vektor (2.54) v difuzijsko konvektivno enačbo za temperaturo (2.50), dobimo

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} + (\overline{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{T} = \left(\frac{1}{RePr} + \alpha_{sgs}\right)\nabla^2\overline{T} + \vec{\nabla}\overline{T} \cdot \vec{\nabla}\alpha_{sgs}. \tag{2.73}$$

Podmrežno viskoznost modeliramo z nastavkom Mansourja in sodelavcev [73] $\nu_{sgs} = (C\Delta)^2\sqrt{\overline{\vec{\omega}} \cdot \overline{\vec{\omega}}}$. Podmrežno difuzivnost pa s predpostavko Hinzeja [50] $\alpha_{sgs} = \nu_{sgs}/Pr_t$. Konstanto modela C bomo določali na več načinov:

- $C = 0$ za modeliranje laminarnih tokov,
- C ima stalno, teoretično izračunano vrednost,
- C je ob stenah dušena z Van Driestovo oziroma Piomellijevo dušilno funkcijo (2.56),
- C je določena dinamično po Germano-Lilly postopku (razdelek 2.5.1).

Poglavje 3

Diskretna valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin

3.1 Uvod

V zadnjih dveh desetletjih smo priča hitremu razvoju valčne analize. Novo orodje, ki izvira iz matematike (Haar [47], Daubechies [25, 26]), je zelo hitro našlo svoje mesto v različnih vejah znanosti in inženirstvu. Valčna analiza se uporablja za zelo široko paleto namenov. Med njimi prednjačijo analiza signalov, stiskanje podatkov in rastrskih slik, reševanje parcialnih diferencialnih enačb, reševanje velikih linearnih sistemov enačb (Ravnik, [94, 96]) in statistika. Valčna analiza je uporabna v tako zelo širokem obsegu zato, ker omogoča več nivojski vpogled v problematiko (Resnikoff in Wells [100]). Večina struktur, ki jih najdemo v naravi in v inženirstvu, pa je več nivojskih in časovno spremenljivih. Valčna analiza omogoča hkratno časovno - frekvenčno analizo (Chan [20]) in je v tem pogledu naprednejša od klasičnega razvoja v Fourierjevo vrsto.

Algoritmi za stiskanje podatkov temeljijo na razvoju po valčnih baznih funkcijah (valčkih), ki zberejo večino energije signala v le nekaj koeficientov. Valčki so ortogonalne bazne funkcije za prostor v kvadratu integrabilnih funkcij $L^2(\Re)$. Vsako funkcijo f, $f \in L^2(\Re)$, lahko zapišemo kot uteženo vsoto baznih funkcij, valčkov. Uteži, s katerimi so pomnoženi valčki v vsoti, so koeficienti valčne transformacije. Po baznih funkcijah lahko razvijemo tudi vektorje. Koeficiente, ki jih izračunamo s postopkom valčne transformacije, shranimo v nov *valčno transformiran* vektor.

Družin valčkov, ki so bazne funkcije za prostor, je več. Za vse je značilno, da jih dobimo s pomočjo krčenja in pomikanja valčka prototipa, oz. prototipne bazne funkcije oz. materinskega valčka. Materinski valček je valček ničtega reda. Označimo ga s $\psi_{0,1}$. Valčke višjih redov označimo s $\psi_{k,l}$, kjer je k red valčka, l pa njegov položaj. Poleg materinskega valčka in valčkov višjih redov spada v družino še merilni valček, navadno označen s $\phi_{0,1}$. Merilni valček skrbi za enako merilo oz. red velikosti med funkcijo, ki jo transformiramo, in valčki.

3.2 Hitra diskretna valčna transformacija

Algoritem za hiter izračun diskretne valčne transformacije je razvil Beylkin s sodelavci [4]. Uporablja piramidalno shemo za razvoj vektorja dolžine potence števila dva v valčni prostor. Algoritem je napisan za Daubechies [25] valčke z M ničelnimi momenti. Vsaka družina valčkov je opisana z $2M$ koeficienti valčnega filtra (h_i, g_i). Koeficiente je do $M = 10$ zapisala Daubechies v članku iz leta 1988 [25]. Za $M = 1$ imamo Haarove valčke (Haar, [47]), ki imajo konstanten merilni valček in se ne prekrivajo. Haarove valčke, ki jih bomo kasneje v izračunih uporabljali, smo podrobneje opisali v prilogi A9 na strani 122.

Izberimo vektor diskretnih vrednosti $\vec{s}^0$ s komponentami $s_k^0; k = 1, \ldots, N = 2^{n+1}$. Algoritem hitre valčne transformacije predvideva rekurzivno uporabo naslednjih formul:

$$s_k^j = \sum_{l=1}^{l=2M} h_l s_{l+2k-2}^{j-1}, \tag{3.1}$$

$$d_k^j = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^{j-1}, \tag{3.2}$$

kjer s_k^j in d_k^j obravnavamo kot periodično ponavljajoča niza s periodo 2^{n-j}. Formuli (3.1) in (3.2) preslikata koeficiente s_k^{j-1} s $k = 1, \ldots, 2^{n-j+1}$ v s_k^j in d_k^j s $k = 1, \ldots, 2^{n-j}$. Inverzno preslikavo (obratno valčno transformacijo) dosežemo s

$$\begin{aligned} s_k^{j-1} &= \sum_{k=1}^{k=M} h_{2k} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^{k=M} g_{2k} d_{n-k+1}^j, \\ d_k^{j-1} &= \sum_{k=1}^{k=M} h_{2k-1} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^{k=M} g_{2k-1} d_{n-k+1}^j. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Z rekurzivno uporabo formul (3.1) in (3.2) za vse $j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, 2^{n-j}$ začenši s $s_k^0, k = 1, \ldots, N$ lahko izračunamo vse s_k^j in d_k^j s številom operacij, ki je sorazmerno z N. Če shranimo d_k^j in edini element v s_1^n, lahko izračunamo obratno transformacijo z rekurzivno uporabo formule (3.3) za $j = n, n-1, \ldots, 0$.

3.3 Hitra valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin

Zahteva, da je število komponent vektorja N potenca številka dva, $N = 2^{n+1}$, je posledica zahteve, da pri transformaciji uporabimo celotne rede valčkov. Vse valčke dobimo s pomikanjem in krčenjem materinskega valčka (priloga A9). Valčke reda k pomikamo v $l = 1, \ldots, 2^k$ položajev. Začenši z merilno funkcijo in materinskim valčkom, ki ima samo en položaj, imamo 2^{n+1} valčkov, če je največji red, ki smo ga upoštevali, n.

Valčno transformacijo bomo uporabili na stiskanje informacij v matrikah integralov, ki izhajajo iz metode robnih elementov. Zaenkrat pustimo izračun matrik ob strani, saj valčna transformacija lahko stisne katerokoli matriko. Pomembno je le dejstvo, da je velikost matrik odvisna od računske mreže. Največja matrika ima dimenzije število robnih vozlišč krat število notranjih vozlišč. Ker bomo transformirali tako vrstice kot stolpce v matriki, bi morali računsko mrežo prilagoditi tako, da bi bilo število notranjih in robnih vozlišč potenca števila dva. Tega praktično ni mogoče zagotoviti, če želimo vsaj malo svobode pri izbiri geometrije problema, ki ga obravnavamo. Hkrati ta zahteva pomeni, da ima vsaka gostejša mreža dvakrat večje število vozlišč kot prejšnja. Iz numeričnega stališča dvakrat večje število vozlišč pomeni veliko več računskega časa. Ta zahteva nam torej onemogoči, da bi izbrali točno določeno število vozlišč, ki bi idealno zapolnile razpoložljiv spomin in procesor.

Naj ima vektor $\vec{s^0}$ poljubno število komponent s_k^0, $k = 1, \ldots, L$ in naj bo prvo število, ki je potenca števila dva in je večje od L, enako N. Vektor bomo razširili z dodatnimi $K = N - L$ komponentami x_i, $i = 1, \ldots, K$ tako, da bo zadnjih K valčnih koeficientov d_k^1 pri transformaciji razširjenega vektorja enakih nič. Valčna transformacija razširjenega vektorja je:

$$\begin{aligned}(s_1^0, s_2^0, \ldots, s_{L-K+1}^0, x_1, s_{L-K+2}^0, x_2, \ldots, s_L^0, x_K) \rightarrow \\ \rightarrow (s_0^n, d_1^n, \ldots, d_1^1, d_2^1, \ldots, d_{N/2-K}^1, 0, \ldots, 0),\end{aligned} \tag{3.4}$$

kjer imamo K valčnih koeficientov enakih nič in L neničelnih valčnih koeficientov. Vedno velja, da je $N/2$ večje ali enako K, saj je N prvo število, ki je potenca števila dva in je večje od K. V primeru $K = N/2$ imamo trivialen slučaj, ko razširjanje vektorja ni potrebno, saj že ima število komponent enako potenci števila dva.

Enačba (3.2) definira vrednosti d_k^1. Zapišimo jo za $j = 1$:

$$d_k^1 = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N/2 \tag{3.5}$$

kjer je s_i^0 razširjeni vektor, definiran na levi strani enačbe (3.4). Radi bi dosegli, da bo zadnjih K valčnih koeficientov enakih nič. To bo res, če bodo komponente razširjenega vektorja x_i izbrane kot rešitev naslednjega sistema enačb:

$$d_k^1 = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^0 = 0, \qquad k = N/2 - K, \ldots, N/2 \tag{3.6}$$

kjer $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \ldots, s_{L-K+1}^0, x_1, s_{L-K+2}^0, x_2, \ldots, s_L^0, x_K)$. Sistem (3.6) ima K enačb za x_k $(k = 1, \ldots, K)$ neznank. Je M zgornje diagonalni sistem, pri katerem so od nič različni elementi samo na M zgornjih diagonalah. Na primer, za $M = 3$ in $K = 6$ je sistem takšen:

$$\left| \begin{array}{cccccc} g_2 & g_4 & g_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_4 & g_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_4 & g_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & g_4 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \right| = \vec{R}, \tag{3.7}$$

pri čemer je desna stran $\vec{R}$ enaka

$$R_k = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{M} g_{2i-1} s^0_{N-2K-1+k+i} & k \leq K-(M-1) \\ -\sum_{i=1}^{\alpha} g_{2i-1} s^0_{N-2K-1+k+i} - \sum_{i=2\alpha+1}^{2M} g_i s^0_{i-2\alpha} & k > K-(M-1) \end{cases}, \tag{3.8}$$

in $\alpha = M - [k - \{K - (M-1)\}]$. Rešitev linearnega sistema enačb (3.6) dobimo rekurzivno tako, da rešimo enačbo za zadnjo neznanko x_K najprej. Uporabimo naslednjo formulo:

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{g_2}\left\{R_k - \sum_{i=2}^{M} g_{2i} x_{k+i-1}\right\} & k \leq K-(M-1) \\ \frac{1}{g_2}\left\{R_k - \sum_{i=1}^{K-k} g_{2i+2} x_{k+i}\right\} & k > K-(M-1) \end{cases}. \tag{3.9}$$

za $k = K, K-1, \ldots, 1$. Rešitev (3.9) sistema (3.6) je še posebej preprosta za Haarove valčke, $(M = 1, g_1 = -g_2)$, namreč

$$x_k = s^0_{L-K+k}, \qquad k = 1, \ldots, K, M = 1. \tag{3.10}$$

Ocenimo velikost koeficientov x_k za Daubechies valčke $(M > 1)$. Ker formulo (3.9) uporabljamo rekurzivno, velja približno $x_{k-1} \approx \frac{x_k}{g_2}$. Torej je velikostni red $O(x_1) \approx (\frac{1}{g_2})^K$. Absolutna vrednost valčnega koeficienta $g_2 = 0.22$ za $M = 2$ in se hitro zmanjšuje, ko M narašča (Daubechies [25]). Zaradi tega je x_1 zelo veliko število za skoraj vsako kombinacijo K in $M > 1$, in jo kmalu ne moremo zapisati z računalnikom v dvojni natančnosti (s 64 biti). Daubechies valčke $(M > 1)$ lahko torej uporabljamo samo, če je K dovolj majhen. V praksi to pomeni, da lahko razširjamo vektor za samo nekaj dodatnih koeficientov. Zaradi te omejitve, ki velja za Daubechies valčke $(M > 1)$, smo se odločili uporabljati Haarove valčke, kjer te omejitve ni.

3.4 Haarova diskretna valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin

V tem razdelku bomo vpeljali algoritem za izvedbo diskretne Haarove valčne transformacije za vektorje poljubnih dolžin. Uporabili bomo matrično obliko zapisa transformacijske matrike namesto piramidalne sheme predstavljene zgoraj. Imenujmo Haarovo valčno matriko s H. Vpeljali smo jo, skupaj s Haarovimi valčki, v prilogi A9 na strani 122. Matrika H je kvadratna s $2^{k_{max}+1} \times 2^{k_{max}+1}$ elementi in vključuje vse valčke do reda k_{max}. Z množenjem z valčno matriko želimo transformirati vektor $\vec{f}$ z N komponentami. Število komponent N naj bo večje od $2^{k_{max}}$ in hkrati manjše od $2^{k_{max}+1}$. Vedno lahko izberemo tak k_{max}, da bo ta neenakost držala.

Vektor z N komponentami bomo razširili na $2^{k_{max}+1}$ komponent na tak način, da bo transformiran vektor $\hat{f} = H\vec{f}$ imel samo N od nič različnih komponent. Razširimo ga tako, da podvojimo zadnje komponente (glej enačbo (3.10)). Valčki najvišjega reda v spodnjem delu matrike Haarove transformacije imajo samo dva od nič različna elementa, ki sta enake velikosti a nasprotno predznačena. Ko te vrstice množimo z vektorjem s podvojenimi komponentami, dobimo vrednost nič. Razširjanje je linearen postopek in ga lahko zapišemo v matrični obliki $E\vec{f} = \tilde{f}$. Razširitvena matrika E ima $2^{k_{max}+1}$ vrstic in N stolpcev. Oglejmo si primer razširjanja za $N = 5$ in $k_{max} = 2$:

$$E\vec{f} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_5 \end{vmatrix} = \vec{f_e}. \tag{3.11}$$

Ko delujemo s Haarovo transformacijsko matriko H na razširjeni vektor $\vec{f_e}$, dobimo valčno transformiran vektor, ki ima samo N od nič različnih komponent:

$$HE\vec{f} = H\vec{f_e} = \left|\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4, \hat{f}_5, 0, 0, 0\right|^T = \hat{f}_e. \tag{3.12}$$

Ker so vse $(\hat{f}_e)_i$ komponente za $i > N$ enake nič, lahko vpeljemo linearno operacijo skrčenja C, ki preoblikuje $\hat{f}_e$ v $\hat{f}$ s tem, da odreže zadnje člene, ki so enaki nič. Operator C v matrični obliki se za naš primer zapiše

$$CHE\vec{f} = C\hat{f}_e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \\ \hat{f}_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \\ \hat{f}_5 \end{vmatrix} = \hat{f}. \tag{3.13}$$

Matrični produkt CHE je kvadratna matrika z $N \times N$ elementi. Tako spremenjena Haarova transformacija oziroma CHE transformacija deluje na vektor poljubne dolžine $\hat{f} = CHE\vec{f}$. Inverzno CHE transformacijo dobimo, če transformiran vektor pomnožimo z inverzno matriko $(CHE)^{-1}$:

$$\vec{f} = (CHE)^{-1}\hat{f} = E^{-1}H^TC^T\hat{f}, \tag{3.14}$$

$$(CHE)^{-1}(CHE) = E^{-1}H^TC^TCHE = \underline{I}, \tag{3.15}$$

kjer je E^{-1} matrika, ki skrajša vektor z odstranitvijo podvojenih komponent, H^T je transponirana Haarova valčna matrika in C^T je transponirana C matrika, ki razširi vektor z dodajanjem ničel. Matrike C, C^T, E in E^{-1} so identitete, če je dolžina vektorja enaka dimenziji valčne matrike $N = 2^{k_{max}+1}$.

CHE transformacija je še vedno Haarova valčna transformacija. Razlikuje se v tem, da pred Haarovo transformacijo spremenimo vektor na tak način, da ravno pravo število komponent transformiranega vektorja postane enako nič. Ker ničel ne shranjujemo, je mogoče uporabiti CHE transformacijo na vektorju poljubne dolžine in dobiti transformiran vektor enake dolžine.

3.5 Izračun produkta matrika-vektor s pomočjo valčne transformacije

Denimo, da želimo izračunati produkt zelo velike matrike z vektorjem. Matrika je tako velika, da je ni mogoče shraniti v računalniški spomin. V času pisanja te disertacije so bili avtorju na voljo računalniki s 1Gb spomina. Matrike integralov, ki jih potrebujemo v metodi robnih elementov so pri gostejših mrežah zlahka presegale to velikost. Produkt matrike $\underline{a}$ z vektorjem $\vec{f}$ bomo izvedli tako, da bomo stolpce in vrstice matrike valčno transformirali, zanemarili po absolutni vrednosti majhne elemente in izpraznjeno matriko shranili z metodo strnjenih vrstic (glej prilogo A14).

Naj bo W matrika valčne transformacije. Mi smo uporabljali $W = CHE$, vendar izvajanje v tem razdelku velja za poljubno matriko valčne transformacije. Z uporabo definicij valčne in obratne valčne transformacije ter zaradi ortonormiranosti valčne matrike W velja

$$\underline{a}\vec{f} = W^T\left(W\underline{a}\vec{f}\right) = W^T\left(\underbrace{W\underline{a}W^T}_{\hat{\underline{a}}}W\vec{f}\right) = W^T\left(\hat{\underline{a}}\underbrace{W\vec{f}}_{\hat{f}}\right) = W^T\left(\hat{\underline{a}}\hat{f}\right), \tag{3.16}$$

kjer smo vpeljali valčno transformirano matriko $\hat{\underline{a}} = W\underline{a}W^T$. Množenje matrike z valčno matriko iz leve transformira stolpce, medtem ko množenje s transponirano valčno matriko iz desne transformira vrstice. Zgornja enačba (3.16) pravi, da matrično vektorski produkt s pomočjo valčne transformacije izračunamo tako, da

- izračunamo valčno transformacijo vektorja: $\hat{f} = W\vec{f}$,
- izračunamo valčno transformacijo matrike $\hat{\underline{a}} = W\underline{a}W^T$,
- zmnožimo valčno transformirano matriko z valčno transformiranim vektorjem ter
- naredimo obratno valčno transformacijo produkta.

Z opisanim postopkom dobimo natančno enak rezultat, kot z direktnim množenjem matrike z vektorjem. Značilnost valčno transformirane matrike $\hat{\underline{a}}$ je, da vsebuje večino informacije v velikih elementih, medtem ko je prispevek majhnih zanemarljiv. Zelo velik delež elementov v matriki je mogoče zanemariti, ne da bi bistveno pokvarili natančnost izračunanega produkta. Bucher et al. [16] je predlagal sledeči način zanemarjanja

$$zanemarjanje(\underline{\hat{a}}) = \begin{cases} \underline{\hat{a}}_{ij}; & |\underline{\hat{a}}_{ij}| \geq \zeta \\ 0; & sicer \end{cases} \tag{3.17}$$

Na tem mestu se je potrebno odločiti za prag ζ. V tem delu bomo opisan algoritem uporabili na matrikah integralov, ki izhajajo iz metode robnih elementov. Integrali so odvisni od strukture mreže, na kateri izvajamo numerično simulacijo. Mreže, ki smo jih uporabili, so različnih oblik in velikosti, zato je težko določiti univerzalno vrednost za prag ζ. Odločili smo se, da bo prag določen kot delež povprečne vrednosti absolutnih vrednosti vseh elementov v matriki. Naj bo $\overline{m}$ povprečna vrednost absolutnih vrednosti vseh elementov v matriki dimenzij $N \times N$:

$$\overline{m} = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j |\underline{\hat{a}}_{ij}|. \tag{3.18}$$

Prag za zanemarjanje elementov v enačbi (3.17) vpeljemo kot $\zeta = \kappa\overline{m}$. Faktor κ smo vpeljali z naslednjim razlogom. Izkaže se, da je relativna napaka, ki jo storimo pri matrično vektorskem produktu izračunanim s pomočjo valčne transformacije, približno linearno odvisna od κ in eksponentno odvisna od števila zanemarjenih elementov v matriki. Uporaba faktorja κ ima tri prednosti pred podajanjem števila elementov za zanemarjanje:

- Algoritem za zanemarjanje je preprosteje izvesti. V primeru podanega števila elementov je potrebno elemente razvrstiti po velikosti oziroma uporabiti metodo streljanja za določitev pragu ζ.

- Napaka z valčno transformacijo izračunanega produkta matrike z vektorjem je približno linearno odvisna od faktorja κ in eksponentno odvisna od števila zanemarjenih elementov.

- Napaka je približno enaka pri danem κ ne glede na velikost matrike, medtem ko napaka pri fiksnem deležu zanemarjenih elementov z večanjem matrike pada.

Ta postopek smo uporabili pri reševanju enačbe kinematike z metodo robnih elementov. Način in implementacija sta podrobneje zapisana v naslednjem poglavju. Algoritem za paralelen izračun in zanemarjanje valčno transformirane matrike pa smo zapisali v poglavju 4.

Glavna skrb pri razvoju in uporabi algoritma, ki s stiskanjem izgublja informacije, je ohranitev pravilnosti izračunanega matrično vektorskega produkta. V poglavju 5 smo natančnost merili z množenjem z naključnimi vektorji in primerjali simulacije tokov s preverjenimi rešitvami.

Poglavje 4

Numerične metode

4.1 Izbira numerične metode

Izvirna želja avtorja je bila rešitev simulacije velikih vrtincev v hitrostno vrtinčnem zapisu z metodo robnih elementov. Tu smo naleteli na dve zelo nasprotujoči si zahtevi. Sama simulacija velikih vrtincev zaradi fizikalnih predpostavk, na katerih temelji, zahteva zelo goste računske mreže. Na drugi strani pa metoda robnih elementov zahteva izračun zelo velikega števila integralov. Število integralov, ki jih moramo izračunati, se povečuje s kvadratom števila vozlišč v računski mreži. Ker je integracija računsko preveč potratna, da bi jo izvajali med vsako iteracijo nelinearnega algoritma, moramo integrale shraniti v delovni spomin računalnika. Ob času pisanja te disertacije so imeli računalniki navadno $1Gb$ delovnega spomina. Predpostavimo mrežo s $2 \cdot 10^5$ vozlišči. Hranjenje matrike s $4 \cdot 10^{10}$ elementi zahteva približno $300Gb$ spomina, kar je odločno preveč, tudi če bi algoritem lahko idealno paralelizirali. Zato smo se odločili, da bomo metodo robnih elementov uporabili samo tam, kjer je najbolj potrebna. V hitrostno vrtinčni formulaciji povzroča velike preglavice pravilna določitev robnih vrtinčnosti (Brown et al. [15], Dennis [30], Shen et al. [111] in Young et al. [145]). Z uporabo metode robnih elementov na enačbi kinematike teh težav ni. Odločili smo se, da bomo reševali enačbo kinematike za rob območja z metodo robnih elementov, ostale enačbe pa s sicer manj natančno, a spominsko manj potratno metodo končnih elementov. Enačba kinematike je Poissonovega tipa. Rešitev Poissonove enačbe samo za rob območja z metodo robnih elementov zahteva matriko integralov velikosti število notranjih vozlišč krat število robnih vozlišč. Ocenimo, da je pri mreži z $2 \cdot 10^5$ vozlišči število robnih vozlišč približno 100 krat manjše od števila vseh vozlišč. Torej ima matrika $4 \cdot 10^8$ elementov in zahteva približno $3Gb$. Tudi ta vrednost je prevelika, zato smo to matriko stisnili z valčno transformacijo.

V nadaljevanju poglavja bomo podali razlago valčno stisnjene metode robnih elementov za rešitev roba iz enačbe kinematike, metode končnih elementov za rešitev notranjosti iz enačbe kinematike in metodo končnih elementov za prenosni enačbi. Ob koncu bomo podali serijski algoritem reševanja, algoritem na podlagi algebrajske paralelizacije in algoritem, v katerem kombiniramo algebrajsko paralelizacijo s paralelizacijo s pomočjo podobmočij.

4.2 Valčno stisnjena metoda robnih elementov za enačbo kinematike

Enačba kinematike (2.35), ki jo tem razdelku rešujemo z valčno stisnjeno metodo robnih elementov, je eliptična enačba Poissonovega tipa. Izpeljavo integralske oblike Poissonove enačbe smo povzeli po Wroblu [142] v prilogi A11 na strani 128. Nadaljno izpeljavo sledimo po Wu in Thompson [143] ter Škerget et al. [119]. Za enačbo kinematike lahko na podlagi splošne integralske oblike (A11.12) pišemo

$$c(\xi)\overline{\vec{v}}(\xi) + \int_\Gamma \overline{\vec{v}}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Gamma u^\star(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{\vec{v}}d\Gamma + \int_\Omega(\vec{\nabla}\times\overline{\vec{\omega}})u^\star d\Omega, \quad \xi\in\Gamma \tag{4.1}$$

kjer je $u^\star$ fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe. Izpeljali smo jo v prilogi A10 na strani 126 ($u^\star = \frac{1}{4\pi r}$ v 3D, $u^\star = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ in 2D). Normalo smo označili z $\vec{n}$, ξ je izvorna točka in $c(\xi)$ je geometrični faktor. Območni integral na desni strani enačbe (4.1) prepišemo z definicijo rotorja produkta, $\vec{\nabla}\times(\overline{\vec{\omega}}u^\star) = (\vec{\nabla}\times\overline{\vec{\omega}})u^\star - \overline{\vec{\omega}}\times\vec{\nabla}u^\star$, v

$$\int_\Omega(\vec{\nabla}\times\overline{\vec{\omega}})u^\star d\Omega = \int_\Omega(\vec{\nabla}\times(\overline{\vec{\omega}}u^\star))d\Omega + \int_\Omega(\overline{\vec{\omega}}\times\vec{\nabla}u^\star)d\Omega. \tag{4.2}$$

Prvi območni integral na desni strani (4.2) spremenimo v robnega z Gaussovim divergenčnim stavkom (A2.3) in dobimo:

$$\int_\Omega(\vec{\nabla}\times\overline{\vec{\omega}})u^\star d\Omega = -\int_\Gamma(\overline{\vec{\omega}}u^\star)\times\vec{n}d\Gamma + \int_\Omega(\overline{\vec{\omega}}\times\vec{\nabla}u^\star)d\Omega. \tag{4.3}$$

Ko izraz za območni integral (4.1) uporabimo v enačbi (4.3), dobimo novo obliko enačbe kinematike

$$\begin{aligned} c(\xi)\overline{\vec{v}}(\xi) \quad + \quad & \int_\Gamma \overline{\vec{v}}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \\ & \int_\Gamma u^\star\left\{(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \overline{\vec{\omega}}\times\vec{n}\right\}d\Gamma + \int_\Omega(\overline{\vec{\omega}}\times\vec{\nabla}u^\star)d\Omega. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Izraz v zavitih oklepajih v robnem integralu na desni strani enačbe (4.4) je za solenoidalno tekočino enak

$$(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \overline{\vec{\omega}}\times\vec{n} = (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\overline{\vec{v}}. \tag{4.5}$$

Dokaz zgornje enakosti smo v komponenti obliki podali v prilogi A3 na strani 113. Zvezo (4.5) uporabimo v enačbi (4.4) in jo preoblikujemo v

$$\int_\Gamma u^\star(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\overline{\vec{v}}d\Gamma = \int_\Gamma(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times(\overline{\vec{v}}u^\star)d\Gamma + \int_\Gamma \overline{\vec{v}}\times(\vec{n}\times\vec{\nabla})u^\star d\Gamma. \tag{4.6}$$

Prvi integral na desni strani zgornje enačbe je enak nič, kar lahko pokažemo z uporabo Gaussovega divergenčnega stavka. Ko vstavimo enačbo (4.6) v (4.4) dobimo integralsko obliko enačbe kinematike, ki ne vsebuje odvodov hitrostnega in vrtinčnega polja:

$$c(\xi)\overline{\vec{v}}(\xi) + \int_\Gamma \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Gamma \overline{\vec{v}}\times(\vec{n}\times\vec{\nabla})u^\star d\Gamma + \int_\Omega(\overline{\vec{\omega}}\times\vec{\nabla}u^\star)d\Omega. \tag{4.7}$$

Zgornja enačba povezuje hitrost v izvorni točki s hitrostjo na robu območja in vrtinčnostjo v območju. Če privzamemo, da vrtinčnost poznamo s pomočjo prenosne enačbe za vrtinčnost vidimo, da enačbo (4.7) lahko uporabimo za implicitni izračun hitrosti na robu in nato za eksplicitni izračun hitrosti v območju.

V integralski enačbi (4.7) nastopajo tako robni kot območni integrali. Zato je za prehod do diskretne oblike potrebno diskrezitirati rob in območje na robne elemente in notranje celice. Rob Γ razdelimo na E robnih elementov Γ_e, območje Ω pa razdelimo na C območnih celic Ω_c z

$$\Gamma \approx \sum_{e=1}^{E} \Gamma_e, \qquad \Omega \approx \sum_{c=1}^{C} \Omega_c. \tag{4.8}$$

Tipe in način diskretizacije smo podrobneje opisali v prilogi A4 na strani 114. Enačbo (4.7) tako lahko aproksimiramo z vsotami

$$\begin{aligned} c(\xi)\vec{v}(\xi) \quad + \quad & \sum_{e=1}^{E} \int_{\Gamma_e} \vec{v}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \\ & \sum_{e=1}^{E} \int_{\Gamma_e} \vec{v}\times(\vec{n}\times\vec{\nabla})u^\star d\Gamma + \sum_{c=1}^{C} \int_{\Omega_c} (\vec{\omega}\times\vec{\nabla}u^\star) d\Omega. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Znotraj vsakega robnega elementa in notranje celice aproksimiramo funkcije polja z robnimi N_i^R in območnimi N_i^O interpolacijskimi funkcijami:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n_r} \vec{v}^i N_i^R, \qquad \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n_o} \vec{\omega}^i N_i^O, \tag{4.10}$$

kjer sta n_r in n_o števili vozlišč v robnem elementu in območni celici. Različne vrste interpolacijskih funkcij so nanizane v prilogi A4. Večino izračunov smo naredili s tri točkovnimi paraboličnimi robnimi elementi in devet točkovnimi Lagrangeevimi notranjimi celicami. Ko vstavimo približke (4.10) v enačbo (4.9) dobimo

$$\begin{aligned} c(\xi)\vec{v}(\xi) + \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \vec{v}^i \left(\int_{\Gamma_e} N_i^R (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma \right) = \\ \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \vec{v}^i \times \left(\int_{\Gamma_e} N_i^R (\vec{n}\times\vec{\nabla})u^\star d\Gamma \right) + \sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n_o} \vec{\omega}^i \times \left(\int_{\Omega_c} N_i^O \vec{\nabla}u^\star d\Omega \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

V zgornji enačbi so trije tipi integralov. V vseh je integrand odvod fundamentalne rešitve pomnožen z interpolacijsko funkcijo in enotsko normalo. Vrednosti integralov so odvisne samo od računske mreže in izbranih interpolacijskih funkcij. Torej jih lahko izračunamo vnaprej, pred začetkom iterativnega postopka, s katerim rešujemo nelinearen sistem enačb. Integrale navadno imenujemo $h_{i,e}$, $\vec{h}_{i,e}^t$ in $\vec{d}_{i,c}$:

$$\begin{aligned} h_{i,e} = \int_{\Gamma_e} N_i^R (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma, \qquad \vec{h}_{i,e}^t &= \int_{\Gamma_e} N_i^R (\vec{n}\times\vec{\nabla})u^\star d\Gamma, \\ \vec{d}_{i,c} &= \int_{\Omega_c} N_i^O \vec{\nabla}u^\star d\Omega. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Za izračun integralov smo uporabili Gaussovo integracijo v polarno transformiranem zapisu. Uporabili smo algoritem, ki ga je opisal Žagar [152, 153]. Z novimi označbami za integrale (4.12) diskretno obliko enačbe kinematike prepišemo v

$$c(\xi)\overline{\vec{v}}(\xi) + \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{\vec{v}}^i h_{i,e} = \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{\vec{v}}^i \times \vec{h}^t_{i,e} + \sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n_o} \overline{\vec{\omega}}^i \times \vec{d}_{i,c}. \tag{4.13}$$

Robni pogoji pri izračunih, ki so bili opravljeni v tem delu, so predpisana hitrost na robu. Da bi dobili nesingularen sistem enačb za robne vrtinčnosti (Škerget et al., [121]) moramo uporabiti tangentno obliko enačbe. Enačbo (4.13) vektorsko pomnožimo z enotsko normalo v izvorni točki:

$$\begin{aligned} c(\xi)\vec{n}(\xi) \times \overline{\vec{v}}(\xi) \quad + \quad & \vec{n}(\xi) \times \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{\vec{v}}^i h_{i,e} = \\ & \vec{n}(\xi) \times \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{\vec{v}}^i \times \vec{h}^t_{i,e} + \vec{n}(\xi) \times \sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n_o} \overline{\vec{\omega}}^i \times \vec{d}_{i,c}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Do sem je izpeljava splošna, velja tako v treh kot v dveh dimenzijah. Omejili se bomo na dve dimenziji. Tekočina teče v ravnini $x - y$. V smeri z si območje predstavljamo neskončno široko, tako da iz te smeri ni vplivov in v tej smeri ni komponente hitrosti $\overline{v}_z = 0$. Ker ni sprememb hitrosti v z smeri velja $\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z} = 0$ in $\frac{\partial \overline{v}_y}{\partial z} = 0$ in s tem zaradi definicije vrtinčnosti (je enaka rotorju hitrosti) ugotovimo, da ima vrtinčnost od nič različno samo z komponento $\overline{\vec{\omega}} = (0, 0, \overline{\omega}_z) = \overline{\omega}$ in jo lahko obravnavamo kot skalar. Ker obravnavamo hitrost na robu, je ugodno vpeljati normalno $\overline{v}_n = n_x\overline{v}_x + n_y\overline{v}_y$ in tangentno $\overline{v}_t = n_x\overline{v}_y - n_y\overline{v}_x$ hitrost. Natančneje smo normalo in tangento vpeljali v prilogi A3 na strani 113. Tudi vektor integralov $\vec{h}^t$ ima v dveh dimenzijah samo eno komponento različno od nič in ga bomo obravnavali kot skalar h^t.

Ko vektorske produkte v enačbi (4.14) izračunamo in jo poenostavimo v dve dimenziji, dobimo samo eno netrivialno izpolnjeno enačbo in sicer v z smeri:

$$c(\xi)\overline{v}_t(\xi) + \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{v}^i_t h_{i,e} = -\sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r} \overline{v}^i_n h^t_{i,e} + \sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n_o} \overline{\omega}^i (n_x d^x_{i,c} + n_y d^y_{i,c}). \tag{4.15}$$

Enačba povezuje hitrost v izvorni točki z normalno in tangentno hitrostjo na robu in vrtinčnostjo po celem območju. Ko izvorno točko ξ postavimo v vsa robna vozlišča, dobimo sistem enačb, ki povezuje $E \cdot n_r$ hitrostnih komponent normalnih na rob, $E \cdot n_r$ hitrostnih komponent tangentnih na rob in $C \cdot n_o$ vrtinčnosti v območju in na robu. Vendar, ker uporabljamo zvezne robne elemente in območne celice, se vozlišča nahajajo tudi na robovih elementov in celic (glej prilogo A4). Zato je število neznank na robu enako številu robnih vozlišč.

Sistem enačb bomo zapisali v matrični obliki. Neznanke zložimo v vektorje. Vektorja normalnih in tangentnih hitrosti $v^i_t \rightarrow \{\overline{v}_t\}$, $v^i_n \rightarrow \{\overline{v}_n\}$ imata toliko komponent, kolikor je robnih vozlišč. Vrtinčnosti zložimo v dva vektorja: prvi vsebuje samo vrtinčnosti na robu

$\overline{\omega}^i_{i\in\Gamma} \rightarrow \{\overline{\omega}^\Gamma\}$, drugi pa samo vrtinčnosti v območju $\overline{\omega}^i_{i\in\Omega\setminus\Gamma} \rightarrow \{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}$. Na enak način zložimo integrale v matrike, pri čemer jih v posameznih vozliščnih točkah seštevamo. Če postavimo robne vrtinčnosti na levo stran enačbe, se v matrično vektorski obliki enačba (4.15) zapiše

$$[D^\Gamma]\{\overline{\omega}^\Gamma\} = ([C] + [H])\{\overline{v}_t\} + [H^t]\{\overline{v}_n\} - [D^{\Omega\setminus\Gamma}]\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}. \tag{4.16}$$

Matrike integralov $[D^\Gamma]$, $[C]$, $[H]$ and $[H^t]$ so kvadratne, polne in nesimetrične. Število vrstic in stolpcev je enako številu robnih vozlišč. Čeprav so te matrike polne, ne zahtevajo zelo veliko pomnilnika, saj je število robnih vozlišč za več redov velikosti manjše od števila območnih vozlišč. Na drugi strani je matrika $[D^{\Omega\setminus\Gamma}]$ pravokotna in tudi polna in nesimetrična. Njeno število vrstic je prav tako enako številu robnih vozlišč, število stolpcev pa je enako številu območnih vozlišč. Shranjevanje te matrike zahteva izredno veliko pomnilnika.

Prav za rešitev tega problema s pomnilnikom smo razvili valčno transformacijo za vektorje poljubnih dolžin, ki je opisana v poglavju 3 in je bila tudi že objavljena v Ravnik et al. [96]. S pomočjo valčne transformacije bomo izračunali samo produkt $[D^{\Omega\setminus\Gamma}]\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}$, saj ostale matrike zahtevajo za več redov velikosti manj pomnilnika. Integrali, ki jih izračunamo pri sestavljanju matrike $[D^{\Omega\setminus\Gamma}]$, so integrali odvodov fundamentalne rešitve, pomnoženi z interpolacijskimi funkcijami. Odvodi fundamentalne rešitve so singularni v izvorni točki in nato zelo hitro padajo. Tako pričakujemo, da bo matrika imela zelo velike vrednosti na diagonali in zelo majhne na ostalem delu. Ker so Haarovi valčki stopničaste funkcije, zelo dobro opišejo hitre spremembe v velikosti elementov v matriki.

Naj bo W matrika valčne transformacije za vektorje poljubnih dolžin. Razlaga, kako jo sestavimo in kako transformacijo numerično izvedemo, je podana v poglavju 3 in v Ravnik et al. [96]. Ker je produkt valčne matrike in njene transponiranke enak identiteti, velja

$$[D^{\Omega\setminus\Gamma}]\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\} = W^T(\underbrace{W[D^{\Omega\setminus\Gamma}]W^T}_{[D_W^{\Omega\setminus\Gamma}]} W\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}). \tag{4.17}$$

Valčno stisnjeno matriko integralov

$$[D_W^{\Omega\setminus\Gamma}] = W[D^{\Omega\setminus\Gamma}]W^T \tag{4.18}$$

izračunamo samo enkrat, pred začetkom iterativnega postopka. Po absolutni vrednosti majhne elemente v matriki $[D_W^{\Omega\setminus\Gamma}]$ lahko zanemarimo, ne da bi izrazito poslabšali natančnost matrično vektorskega produkta v enačbi (4.17). Preostalo, sedaj izpraznjeno matriko integralov, zapišemo z metodo strnjenih vrstic. Podrobneje smo metodo strnjenih vrstic opisali v prilogi A14 na strani 140.

Valčno stisnjen produkt matrike z vektorjem je potrebno izvesti med vsako iteracijo nelinearne zanke. V primerjavi z množenjem polne nestisnjene matrike z vektorjem valčni izračun zahteva, poleg množenja prazne matrike z vektorjem, še dva dodatna produkta praznih matrik z vektorjema - valčno transformacijo vektorja vrtinčnosti $W\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}$ in obratno valčno transformacijo zmnožka stisnjene matrike z valčno transformirano vrtinčnostjo $W^T([D_W^{\Omega\setminus\Gamma}]W\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\})$. Navkljub temu, da moramo izvesti tri množenja praznih matrik z vektorjem, je število potrebnih operacij še vedno veliko manjše, kot pri enem produktu polne matrike z vektorjem. Torej valčno stisnjen matrično vektorski produkt, poleg izrednega prihranka pomnilnika, prinese tudi rahlo skrajšanje računskega časa.

Učinkovitost valčno stisnjenega izračuna produkta (4.17) smo dokazali in preverili v poglavju 5 na primerih laminarnih tokov pri visokem Reynoldsovem številu.

Končna diskretna oblika enačbe kinematike za izračun robnih vrtinčnosti na podlagi valčno transformirane metode robnih elementov se glasi

$$[D^\Gamma]\{\overline{\omega}^\Gamma\} = ([C]+[H])\{\overline{v}_t\} + [H^t]\{\overline{v}_n\} - W^T\left([D_W^{\Omega\setminus\Gamma}]W\{\overline{\omega}^{\Omega\setminus\Gamma}\}\right). \tag{4.19}$$

Za rešitev sistema linearnih enačb (4.19) smo uporabili direktni solver z zgornje spodnjo (LU) dekompozicijo (Press et al. [89]). Ker se sistemska matrika $[D^\Gamma]$ ne spreminja, sistem pa moramo rešiti več stotisočkrat, izvedemo LU dekompozicijo samo enkrat pred iterativnim postopkom in tako dosežemo, da je računski čas za rešitev sistema krajši kot čas, potreben za izračun vektorja na desni strani sistema.

4.3 Metoda končnih elementov za enačbo kinematike

Z metodo robnih elementov smo enačbo kinematike rešili za rob. Tako poznamo tako hitrost kot vrtinčnost na robu. Naslednji korak v algoritmu je izračun hitrosti v notranjosti območja tudi s pomočjo enačbe kinematike. Metoda robnih elementov opisana zgoraj, z znanimi vrednostmi na robu omogoča ekspliciten izračun hitrosti v območju. Žal ta zahteva matriko integralov velikosti kvadrat vseh vozlišč. Pri večjih mrežah, ki jih bomo uporabili v tem delu, je tak izračun neizvedljiv.

Po komponentah zapisana enačba kinematike je Poissonova enačba za skalarno polje. Ker smo vrednosti na robu izračunali s pomočjo metode robnih elementov, jim lahko predpišemo Dirichletove robne pogoje. Enačbe za vsako komponento posebej rešimo z metodo končnih elementov. Ker bomo Poissonovo enačbo za skalarno polje v tem delu reševali večkrat, smo izpeljavo za poljubno skalarno polje podali v prilogi A12, na strani 132.

Spominska zahtevnost metode končnih elementov raste linearno s številom vozlišč, zato jo lahko uporabimo tudi pri zelo gostih mrežah.

4.4 Enačba prenosa vrtinčnosti

Enačba prenosa vrtinčnosti (2.72)

$$\frac{\partial\overline{\vec{\omega}}}{\partial t} + (\overline{\vec{v}}\cdot\vec{\nabla})\overline{\vec{\omega}} = (\overline{\vec{\omega}}\cdot\vec{\nabla})\overline{\vec{v}} - \frac{Ra}{PrRe^2}\vec{\nabla}\times\overline{T}\vec{g} + \left(\frac{1}{Re}+\nu_{sgs}\right)\nabla^2\overline{\vec{\omega}} + (\vec{\nabla}\times\overline{\vec{\omega}})\times\vec{\nabla}\nu_{sgs} \tag{4.20}$$

povezuje filtrirano vrtinčno in hitrostno polje. Reševali jo bomo v dveh dimenzijah. Izberemo, da tok teče v ravnini $x - y$ in da gravitacijski pospešek deluje v negativno smer y; $\vec{g} = (0, -1)$. Zaradi definicije vrtinčnosti ima v tem primeru vektor vrtinčnosti od nič različno komponento samo v z smeri. Lahko jo obravnavamo kot skalar $\overline{\omega}$. Pri prehodu na dve dimenziji ugotovimo, da ima enačba (4.20) netrivialno samo enačbo v z smeri. Operator nabla je dvodimenzijski; $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. Člen, ki razteguje in vrti vrtince $(\vec{\overline{\omega}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\overline{v}}$ odpade. Zadnji člen na desni strani pa je v dveh dimenzijah enak

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\overline{\omega}}) \times \vec{\nabla}\nu_{sgs} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \nu_{sgs}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\frac{\partial \nu_{sgs}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{\nabla}\overline{\omega} \cdot \vec{\nabla}\nu_{sgs} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

S tem se z komponenta enačbe (4.20) zapiše

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t} + (\vec{\overline{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\omega} = \frac{Ra}{PrRe^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \left(\frac{1}{Re} + \nu_{sgs}\right)\nabla^2\overline{\omega} + \vec{\nabla}\overline{\omega} \cdot \vec{\nabla}\nu_{sgs}. \tag{4.22}$$

Reynoldsovo število je konstanta, zato zadnja dva člena na desni strani zgornje enačbe lahko združimo in dobimo

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t} + (\vec{\overline{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{\omega} = \vec{\nabla} \cdot \left[(\frac{1}{Re} + \nu_{sgs})\vec{\nabla}\overline{\omega}\right] + \frac{Ra}{PrRe^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \tag{4.23}$$

skalarno difuzijsko advektivno parcialno diferencialno enačbo z akumulacijskim in advektivnim členom na levi in difuzijskim členom ter izvori na desni strani. Enačba je zapisana za dve dimenziji, vrtinčnost je skalar, teža pa deluje v nasprotni smeri osi y.

Zgornja difuzijsko advektivna parcialna diferencialna enačba je po členih zelo podobna energijski enačbi, ki jo bomo obdelali spodaj. Obe bomo rešili z metodo končnih elementov, zato smo reševanje difuzijske advektivne parcialne diferencialne enačbe za poljubno skalarno polje z metodo končnih elementov opisali v prilogi A13 na strani 137.

4.5 Energijska enačba

Tudi energijsko enačbo (2.73)

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + (\vec{\overline{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{T} = \left(\frac{1}{RePr} + \alpha_{sgs}\right)\nabla^2\overline{T} + \vec{\nabla}\overline{T} \cdot \vec{\nabla}\alpha_{sgs}. \tag{4.24}$$

zapišemo v dveh dimenzijah in jo preoblikujemo

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + (\vec{\overline{v}} \cdot \vec{\nabla})\overline{T} = \vec{\nabla} \cdot \left[(\frac{1}{RePr} + \alpha_{sgs})\vec{\nabla}\overline{T}\right]. \tag{4.25}$$

v skalarno difuzijsko konvektivno prenosno enačbo za temperaturo (4.25). Členi so enake oblike kot členi v prenosni enačbi za vrtinčnost (4.23), zato ju opravičeno lahko rešujemo na enak način s pomočjo metode končnih elementov. Metoda je podrobno obrazložena v prilogi A13 na strani 137.

4.6 Izračun tlaka na robu z metodo robnih elementov

Tlak v hitrostno vrtinčnem zapisu ni del sistema enačb. Če nas zanima, ga računamo ob koncu nelinearne zanke za časovni korak iz filtriranega hitrostnega in temperaturnega polja. Tlačna enačba (2.53) je Poissonovega tipa. Izpeljavo integralske oblike Poissonove enačbe (A11.12) smo povzeli po Wroblu [142] v prilogi A11 na strani 128. Za tlačno enačbo se zapiše:

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \int_\Gamma \overline{p}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Gamma u^\star(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{p}d\Gamma - \int_\Omega(\vec{\nabla}\cdot\vec{f_p})u^\star d\Omega. \tag{4.26}$$

Območni člen v enačbi (4.26) preoblikujemo s pomočjo vektorske enakosti $(\vec{\nabla}\cdot\vec{f_p})u^\star = \vec{\nabla}\cdot(\vec{f_p}u^\star) - \vec{f_p}\cdot\vec{\nabla}u^\star$ in Gaussovega stavka (A2.1) v

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \int_\Gamma \overline{p}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Gamma u^\star(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{p}d\Gamma - \int_\Gamma \vec{n}\cdot\vec{f_p}u^\star d\Gamma + \int_\Omega \vec{f_p}\cdot\vec{\nabla}u^\star d\Omega. \tag{4.27}$$

Zaradi definicije (2.51), ki pravi, da je f_p enak gradientu tlaka, velja na robu: $\vec{n}\cdot\vec{f_p} = (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\overline{p}$ in s tem se robna integrala na desni strani enačbe (4.27) odštejeta. Končamo z enačbo

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \int_\Gamma \overline{p}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Omega \vec{f_p}\cdot\vec{\nabla}u^\star d\Omega. \tag{4.28}$$

Robni pogoj, ki smo ga uporabili pri izpeljavi, je do konstante nedoločen. Tudi robni integral v enačbi (4.28) je do konstante nedoločen, kar dokažemo z Gaussovim stavkom

$$\int_\Gamma (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \int_\Omega \nabla^2 u^\star d\Omega = 0. \tag{4.29}$$

Rešitev enačbe (4.28) je mogoča le, če v enem izmed vozlišč izberemo referenčni tlak, torej $\overline{p} = 1$.

V integralski enačbi (4.28) nastopajo tako robni kot območni integrali. Zato je potrebno za prehod do diskretne oblike diskretizirati rob in območje na robne elemente in notranje celice. Rob Γ razdelimo na E robnih elementov Γ_e, območje Ω pa razdelimo na C območnih celic Ω_c z $\Gamma \approx \sum_{e=1}^{E}\Gamma_e, \Omega \approx \sum_{c=1}^{C}\Omega_c$ na enak način, kot smo to storili pri enačbi kinematike. Diskretizirana oblika enačbe (4.28) je

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma_e} \overline{p}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma = \sum_{c=1}^{C}\int_{\Omega_c} \vec{f_p}\cdot\vec{\nabla}u^\star d\Omega. \tag{4.30}$$

Znotraj vsakega robnega elementa in notranje celice aproksimiramo funkcije polja z robnimi N_i^R in območnimi N_i^O interpolacijskimi funkcijami:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{n_r}\overline{p}^i N_i^R, \qquad \vec{f_p} = \sum_{i=1}^{n_o}\vec{f_p^i}N_i^O. \tag{4.31}$$

Z nastavkoma (4.31) integralsko tlačno enačbo prepišemo v

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \sum_{e=1}^{E}\sum_{i=1}^{n_r}\overline{p}^i\left(\int_{\Gamma_e} N_i^R(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})u^\star d\Gamma\right) = \sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n_o}\vec{f_p^i}\cdot\left(\int_{\Omega_c} N_i^O\vec{\nabla}u^\star d\Omega\right). \tag{4.32}$$

Integrala v zgornji enačbi sta odvisna samo od geometrije mreže in sta enaka integralom, ki nastopajo pri rešitvi enačbe kinematike. Imenujemo ju na enak način $h_{i,e}$ in $\vec{d}_{i,c}$:

$$h_{i,e} = \int_{\Gamma_e} N_i^R (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u^\star d\Gamma, \qquad \vec{d}_{i,c} = \int_{\Omega_c} N_i^O \vec{\nabla} u^\star d\Omega \tag{4.33}$$

in z njima zapišemo končno diskretno obliko tlačne enačbe

$$c(\vec{\xi})\overline{p}(\vec{\xi}) + \sum_{e=1}^{E} \sum_{i=1}^{n_r} \overline{p}^i h_{i,e} = \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n_o} \vec{f}_p^i \cdot \vec{d}_{i,c}. \tag{4.34}$$

Sistem enačb za robne vrednosti tlaka dobimo, ko izvorno točko $\vec{\xi}$ postavimo v vsa robna vozlišča. V dveh dimenzijah imamo dve matriki območnih integralov velikosti število robnih vozlišč krat število vseh vozlišč. K sreči tlak ni vključen v nelinearni sistem enačb, ampak ga izračunavamo samo po potrebi iz že izračunanega hitrostnega in vrtinčnega polja. Ker ni v zanki, je potreben izračun tlaka samo enkrat na časovni korak, izvesti pa ga je mogoče tudi po končani simulaciji iz rezultatov. Pri gostih mrežah sta matriki območnih integralov preveliki za shranjevanje v spominu, zato takrat integrale računamo sproti za vsako robno vozlišče posebej.

4.7 Izračun tlaka v območju z metodo končnih elementov

Tlačna enačba (2.53) je Poissonovega tipa. Z metodo robnih elementov smo izračunali tlak na robu. Čeprav metoda robnih elementov omogoča ekspliciten izračun tlaka v območju, ga ne moremo uporabiti, saj pri gostih mrežah zahteva zelo veliko matriko integralov. Velikost matrike integralov raste s kvadratom števila vseh vozlišč. Podobno kot pri reševanju enačbe kinematike za notranje hitrosti, se tudi tu zatečemo k metodi končnih elementov.

Imamo torej Poissonovo enačbo za skalarno tlačno polje z Dirichletovimi robnimi pogoji. Rešimo jo z metodo končnih elementov, kot je opisano v prilogi A12 na strani 132.

4.8 Izračun tokovne funkcije z metodo končnih elementov

Tokovna funkcija ψ je definirana s pomočjo solenoidalnosti hitrostnega polja. Vpeljemo jo kot vektorski potencial $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$ hitrostnega polja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \qquad \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}, \tag{4.35}$$

Solenoidalnost hitrostnega polja zlahka dokažemo, saj je divergenca rotorja po definiciji enaka nič:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \equiv 0. \tag{4.36}$$

Delujmo z operatorjem rotor na enačbo (4.35)

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) - \nabla^2 \vec{\psi}. \tag{4.37}$$

Izberemo lahko $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$. S tem se zgornja enačba poenostavi, dobimo Poissonovo enačbo za tokovno funkcijo:

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega}, \tag{4.38}$$

kjer smo že upoštevali definicijo vrtinčnosti (2.26). V dveh dimenzijah se vektorska enačba (4.38) skrči v skalarno enačbo

$$\nabla^2 \psi = -\omega. \tag{4.39}$$

Za uspešno rešitev enačbe (4.39) z metodo končnih elementov moramo določiti vrednost tokovne funkcije na robu območja. Ker je tokovna funkcija do konstante nedoločena, lahko vrednost v eni točki robu območja poljubno izberemo. Za izračun tokovne funkcije pa integriramo definicijo (4.35); v dveh dimenzijah velja:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4.40}$$

S tem za tangentni odvod (priloga A3 na strani 113) dobimo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = n_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \psi}{\partial x} = n_x v_x + n_y v_y \tag{4.41}$$

Izhajajoč iz točke na robu, ki smo ji predpisali vrednost, lahko v ostalih točkah na robu vrednost izračunamo z integracijo

$$\psi_\Gamma = \int_\Gamma n_x v_x + n_y v_y d\Gamma. \tag{4.42}$$

S tem smo skalarni Poissonovi enačbi za tokovno funkcijo predpisali Dirichletove robne pogoje. Rešimo jo z metodo končnih elementov, kot smo opisali v prilogi A12 na strani 132.

4.9 Algoritmi reševanja

Nelinearen sistem enačb smo z numeričnimi metodami preoblikovali v več medsebojno odvisnih linearnih sistemov enačb. Ker so enačbe odvisne druga od druge preko difuzivnosti, viskoznosti in izvornih členov, je potrebno uporabiti iterativni postopek za dosego konvergence znotraj vsakega časovnega koraka. Spremembo veličin v iterativnem postopku moramo podrelaksirati, saj v nasprotnem primeru hitro pride do divergence.

S stališča računskega časa je ugodno delo porazdeliti na več procesorjev. V praksi obstajata dva prevladujoča načina paralelnega računanja. Prva možnost je t.i. algebrajska paralelizacija, pri kateri delo delimo na nivoju matrik in vektorjev. Vsak procesor izvaja svoj del matrično vektorskih produktov. Spominska zahtevnost se idealno porazdeli med procesorje, saj vsak hrani samo svoj del matrik. Pridobitev časa pa ni tako dobra, saj je po izračunu delnih produktov potrebna komunikacija in seštevanje v skupen rezultat. Druga možnost je razdelitev območja na dele (*domain decomposition*, Brakkee et al. [6, 7], El-Gebeily [32]). Tu vsak procesor računa serijsko samo svoj del območja, med seboj pa si izmenjujejo samo robove območij. Komunikacije je občutno manj, vendar pa ima tak postopek lahko negativen vpliv na konvergenco.

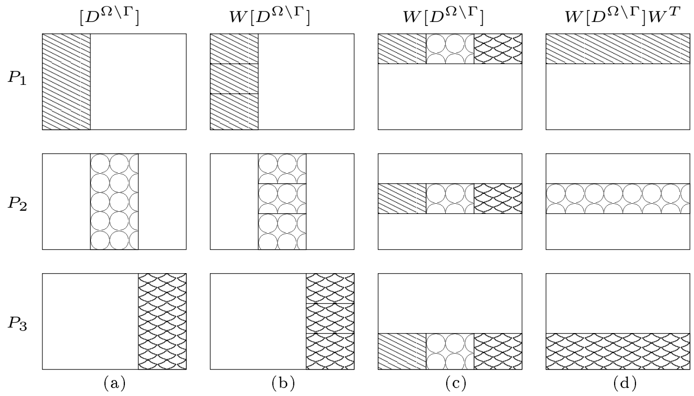
Pri reševanju enačbe kinematike nastopajo integrali, ki so odvisni samo od geometrije mreže. Matriko integralov stisnemo z valčno transformacijo. Število procesorjev, ki jih potrebujemo za paralelni izračun valčno stisnjene matrike integralov je praviloma večji od števila procesorjev potrebnih za sam izračun. Zato valčno stisnjeno matriko izračunamo najprej, jo shranimo na disk in šele nato zaženemo pravo simulacijo. V nadaljevanju razdelka si bomo zato najprej ogledali paralelen izračun valčno transformirane matrike in nato serijski in paralelna algoritma.

Celotno programsko kodo, katere osnova je programski paket BEMflow (Škerget in Hriberšek, [122]), smo napisali v programskem jeziku FORTRAN z uporabo paralelne knjižnice MPI [35].

4.9.1 Paralelen izračun valčno transformirane matrike

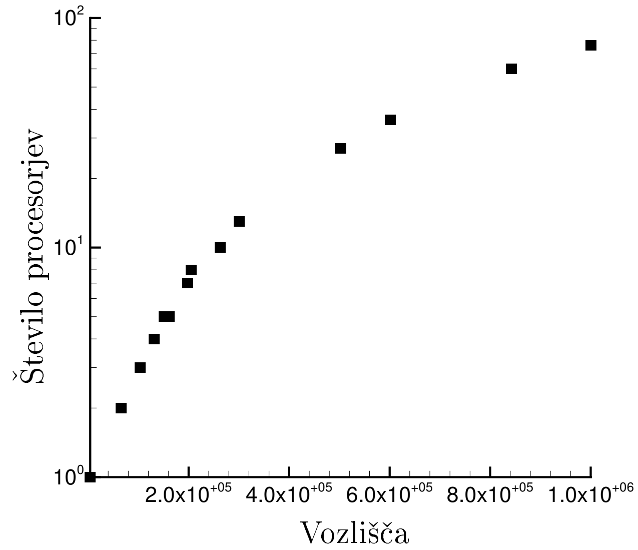
Metoda robnih elementov za rešitev Poissonove enačbe zahteva matriko območnih integralov. Matriko izračunamo samo enkrat in jo v iterativnem postopku večkrat uporabimo za izračun produktov z različnimi vektorji. Ker velikost matrike pri gostih mrežah presega kapaciteto računalniškega spomina, smo integracijo, sestavljanje matrike in valčno transformacijo matrike izvedli paralelno na gruči računalnikov.

Algoritem bomo zapisali za poljubno matriko pravokotne oblike. Na gruči računalnikov zaganjamo isti program na več procesorjih. Vsak procesor ve koliko je vseh procesorjev in kateri izmed njih je sam. Na podlagi teh informacij si procesorji med seboj razdelijo matriko po stolpcih. Vsak izračuna integrale za samo svoj del matrike. Prvi korak k izračunu valčno transformirane matrike je transformacija stolpcev. Ker ima vsak procesor svoje stolpce, vsak svoje stolpce transformira. Naslednji korak pa je transformacija vrstic. Zato si procesorji izmenjajo dele matrike, tako da ima vsak svoj del vrstic. Ko transformira še vsak svoj del vrstic, imamo celo valčno transformirano matriko razdeljeno po vrsticah med procesorje. Postopek je prikazan na primeru treh procesorjev na sliki 4.1. Sledi izračun povprečja absolutnih vrednosti, ki ga procesorji izvedejo skupaj. Ker uporabnik pred izračunom navadno ne ve, kakšen del elementov lahko zanemari, smo algoritem zapisali tako, da med zanemarjanjem program testira natančnost produkta stisnjene matrike z vektorjem (glej razdelek 5.9) in zanemarjanje ustavi pri željeni natančnosti. Ob koncu vsak procesor zapiše svoj del matrike v sistemu strnjenih vrstic (Priloga A14) na disk, kjer ostane za kasnejšo uporabo v iterativnem postopku. V delu algoritma, ko poteka komunikacija in si procesorji izmenjajo stolpce za vrstice, je spominska zahtevnost največja. Vsak procesor mora hraniti $2/n$-ti del celotne matrike, če je število vseh procesorjev enako



Slika 4.1: Paralelen izračun valčno transformirane matrike $[D_W^{\Omega\setminus\Gamma}] = W[D^{\Omega\setminus\Gamma}]W^T$ na primeru treh procesorjev. (a) Vsak procesor izračuna svoj del matrike. (b) Vsak procesor naredi valčno transformacijo svojih stolpcev. (c) Procesorji si izmenjujejo podatke na tak način, da vsak dobi del vrstic. (d) Procesorji naredijo valčno transformacijo vrstic.

n. S tem lahko predvidimo koliko procesorjev potrebujemo za valčno stiskanje integralov. Za mreže do enega milijona vozlišč smo potrebno število procesorjev podali na grafu 4.2.



Slika 4.2: Število procesorjev, ki so potrebni za izračun valčno stisnjene matrike integralov v odvisnosti od števila vozlišč za pravokotne mreže. Predpostavili smo, da vsak procesor lahko hrani do 800Mb podatkov.

Z uporabo stiskanja z valčno transformacijo vpeljemo v matriko napako. Zato je mogoče elemente v matriki zapisati v enojni natančnosti, ne da bi vpeljali dodatno napako. Integrale in samo transformacijo izračunamo v dvojni natančnosti, nato pa valčno transformirano matriko zapišemo v enojni natančnosti. Zapis strnjenih vrstic zahteva dodatne vektorje celih števil. Izkaže se, da zapis polne matrike v enojni natančnosti v zapisu strnjenih vrstic zavzame približno ravno toliko spomina kot klasičen zapis enakega števila elementov v dvojni natančnosti. Torej je izpraznjenost matrike v našem algoritmu tudi mera za zmanjšanje količine potrebnega spomina.

4.9.2 Serijski algoritem

Serijski algoritem uporabimo pri simulacijah na majhnih mrežah, oziroma v primerih, ko stiskanje z valčki zmanjša matriko integralov do take mere, da delovni spomin enega procesorja zadostuje.

Algoritem, ki predvideva, da je valčno stisnjena matrika integralov že izračunana in zapisana na disku, se glasi:

1. Izberemo začetno vrtinčno (ω_0) in hitrostno ($\vec{v}_0$) polje, postavimo začetni čas $\tau = 0$ in začetno vrednost za števec nelinearne zanke $i = 0$ in preberemo valčno stisnjeno matriko integralov.

2. Časovna zanka, $\tau := \tau + 1$.

3. Nelinearna zanka, $i := i + 1$.

4. Kinematika

   (a) Z valčno stisnjeno metodo robnih elementov rešimo enačbo kinematike (razdelek 4.2). Uporabimo vrtinčnosti v območju iz prejšnje iteracije nelinearne zanke. Po izračunu imamo znane hitrosti in vrtinčnosti po robu območja.

   (b) Ponovno rešimo enačbo kinematike, tokrat z metodo končnih elementov (razdelek 4.3). Iz prejšnjega koraka poznamo celoten rob, vrtinčnosti v območju pa vzamemo iz prejšnje iteracije nelinearne zanke. Rezultat so hitrosti v notranjosti. Hitrosti na robu so znane, torej rešujemo Poissonovo enačbo z Dirichletovimi robnimi pogoji.

5. Izračun podmrežne viskoznosti in difuzivnosti

6. Kinetika; energijska enačba

   (a) Z novim hitrostnim poljem iz kinematike in z novo difuzivnostjo iz energijske enačbe izračunamo novo temperaturno polje (razdelek 4.5).

7. Kinetika; prenos vrtinčnosti

   (a) Z robnimi vrtinčnostmi iz kinematike kot robnimi pogoji in z novimi temperaturami kot izvornim vzgonskim členom in novo podmrežno viskoznostjo rešimo enačbo prenosa vrtinčnosti za notranje vrtinčnosti (razdelek 4.4).

   (b) Uporabimo podrelaksacijo $0 < \phi \leq 1$ za izračun novih vrtinčnosti v območju $\omega_{i+1} := \phi\omega_{i+1} + (1-\phi)\omega_i$.

8. Preverimo konvergenco

   (a) Izračunamo razliko med vrtinčnimi polji zaporednih iteracij $||\omega_{i+1} - \omega_i||_2 / ||\omega_{i+1}||_2$ in jo primerjamo s konvergenčnim kriterijem. Če kriterij še ni dosežen, nadaljujemo z nelinearno zanko v koraku 3.

9. Konec časovnega koraka:

   (a) Po potrebi izračunamo tlak, tokovno funkcijo, povprečno polje, itd.

   (b) Izpišemo rezultate v datoteko $\omega_\tau = \omega_{i+1}$, $\vec{v}_\tau = \vec{v}_{i+1}$.

   (c) Primerjamo število časovnih korakov z vnaprej določeno vrednostjo. Če je potrebno simulirati še en časovni korak se vrnemo na 2.

10. Konec izračuna.

4.9.3 Algebrajska paralelizacija

Algebrajska paralelizacija razdeli delo med procesorje na nivoju matrično vektorskih produktov in skalarnih produktov. Uporabili smo jo za paralelno rešitev enačbe kinematike z metodo robnih elementov, saj lahko veliko polno matriko integralov razdelimo med procesorje. Ko vsak procesor izračuna svoj del matrično vektorskega produkta, uporabimo komunikacijo, da izračunamo končno vrednost. Tudi sistemska matrika je razdeljena med procesorje, tako da komunikacija nastopa tudi znotraj iterativnega sloverja. Vsako iteracijo je potrebno komunicirati za izračun matrično vektorskih produktov in skalarnih produktov. Prednost algebrajske paralelizacije je enakomerna porazdelitev zahtev po spominu na procesorje in identičen konvergenčni potek, kot pri serijskem algoritmu. Slabost pa predvsem veliko komunikacije, ki potrebuje veliko časa. Zato z uporabo večjega števila procesorjev pridobimo le malo računskega časa.

Algoritem je praktično enak serijskemu, z razliko, da so matrike integralov in sistemska matrika, ki izvirajo iz metode robnih elementov, porazdeljene med procesorje in da se sistem reši paralelno. Ostali del algoritma rešujejo serijsko vsi procesorji.

4.9.4 Paralelizacija z deljenjem območja na dele

Z namenom, da bi zmanjšali količino podatkov, ki jih je potrebno komunicirati med paralelnim izračunom, razdelimo območje na podobmočja. Vsak procesor je zadolžen samo za svoje podobmočje. Rešuje ga sam, serijsko. Komunicirati je potrebno vrednosti na robovih podobmočij, ki predstavljajo robne pogoje. Prednosti tega postopka so: podobmočja imajo manj vozlišč kot celo območje, zato se zmanjša velikost matrik in pospeši reševanje sistemov enačb. Komunikacije je malo, zato je tak postopek hiter. Slabost pa je, da zaradi robov v notranjosti, ki si jih morajo procesorji izmenjevati, vpeljemo dodatno nelinearnost v sistem. Direktna posledica tega je, da se poveča število iteracij v nelinearni zanki.

Izračun robnih vrednosti z metodo robnih elementov temelji na Biot-Savartovem zakonu za celoten rob. Zakon ne velja za robove podobmočij, zato za ta izračun uporabimo algebrajsko paralelizacijo. Omejili smo se tudi pri izbiri števila podobmočji. Spodnji algoritem je napisan tako, da je število podobmočij enako številu procesorjev. Vsak procesor ima svoje podobmočje, ki ga rešuje serijsko.

Algoritem je sledeč:

1. Na podlagi zaporedne številke vsak procesor določi:
   (a) svoja robna vozlišča za izračun robnih vrednosti z metodo robnih elementov,
   (b) mrežo svojega podobmočja.
2. Izberemo začetno vrtinčno (ω_0) in hitrostno ($\vec{v}_0$) polje, postavimo začetni čas $\tau = 0$ in začetno vrednost za števec nelinearne zanke $i = 0$ in preberemo valčno stisnjeno matriko integralov.
3. Časovna zanka, $\tau := \tau + 1$.
4. Nelinearna zanka, $i := i + 1$.
5. Kinematika
   (a) Enačbo kinematike (razdelek 4.2) rešimo z algebrajsko paralelizirano valčno stisnjeno metodo robnih elementov. Uporabimo vrtinčnosti v območju iz prejšnje iteracije nelinearne zanke. Po izračunu imamo znane hitrosti in vrtinčnosti po robu območja. Vsak procesor prenese robne vrednosti na mrežo svojega podobmočja.
   (b) Vsak procesor za izračun hitrosti na notranjih robovih svojega podobmočja uporabi metodo robnih elementov na celem območju. Ker računamo samo robe podobmočja, je število dodatnih integralov majhno in ne predstavlja velike spominske zahtevnosti. Na ta način ima vsak procesor znane vrednosti hitrosti na robu svojega podobmočja.
   (c) Vsak procesor za svoje podobmočje reši enačbo kinematike, tokrat z metodo končnih elementov (razdelek 4.3). Iz prejšnjega koraka poznamo celoten rob podobmočja, vrtinčnosti v območju vzamemo iz prejšnje iteracije nelinearne zanke. Rezultat so hitrosti v notranjosti podobmočja. Hitrosti na robu so znane, torej rešujemo Poissonovo enačbo z Dirichletovimi robnimi pogoji.
6. Komunikacija I.
   (a) Procesorji si medsebojno izmenjajo hitrosti v podobmočjih.

7. kinetika; transportni enačbi:
   (a) Vsak procesor reši transportni enačbi za celo območje samo za rob svojega podobmočja. Uporabi nove hitrosti in vrtinčnosti iz prejšnjega časovnega koraka.
   (b) Vsak procesor, z uporabo novega hitrostnega polja, reši transportni enačbi za svoje podobmočje z metodo končnih elementov. Robne pogoje na zunanjem robu ima iz kinematike, na notranjem pa iz prejšnjega koraka.
   (c) Uporabimo podrelaksacijo $0 < \phi \leq 1$ za izračun novih vrtinčnosti v podobmočju $\omega_{i+1} := \phi\omega_{i+1} + (1-\phi)\omega_i$.
8. Komunikacija II.
   (a) Procesorji is izmenjajo vrtinčnosti in temperature iz podobmočij.
9. Preverimo konvergenco
   (a) Izračunamo razliko med vrtinčnimi polji zaporednih iteracij $||\omega_{i+1}-\omega_i||_2/||\omega_{i+1}||_2$ in jo primerjamo s konvergenčnim kriterijem. Če kriterij še ni dosežen, nadaljujemo z nelinearno zanko v koraku 4.
10. Konec časovnega koraka:
    (a) Po potrebi izračunamo tlak, tokovno funkcijo, povprečno polje, itd.
    (b) Izpišemo rezultate v datoteko $\omega_\tau = \omega_{i+1}$, $\vec{v}_\tau = \vec{v}_{i+1}$.
    (c) Primerjamo število časovnih korakov z vnaprej določeno vrednostjo. Če je potrebno simulirati še en časovni korak se vrnemo na 3.
11. Konec izračuna.

Zgornji algoritem smo preverili na primerih tokov, za katere so poznane preverjene rešitve. Ugotovili smo, da pri majhnih vrednostih kriterialnih števil ostane število iteracij, potrebnih za dosego konvergence, praktično nespremenjeno. Žal pa, ne glede na število podobmočij, ki smo jih uporabili, število iteracij pri visokih vrednostih kriterialnega števila močno naraste. Pri testiranju smo ugotovili, da število iteracij naraste do takšne mere, da je čas, potreben za dosego konvergence z več procesorji enak, oziroma celo večji od časa, ki ga potrebuje samo z algebrajsko paralelizacijo napisan algoritem.

Poglavje 5

Validacija numerične sheme na primerih analitičnih in laminarnih tokov

5.1 Uvod

Preden se podamo v modeliranje turbulentnih tokov želimo temeljito preizkusiti numerično shemo in algoritem, ki smo ju razvili v prejšnjem poglavju. Namen poglavja je dvojen, na eni strani želimo z izračuni analitično rešljivih poenostavitev difuzivno advektivne enačbe dokazati pravilnost zapisa numeričnega algoritma, po drugi strani pa s simulacijo laminarnih tokov pri visokih Reynoldsovih številih in s primerjavo s preverjenimi rešitvami ugotoviti vpliv uporabe valčne transformacije.

Najprej smo v difuzijsko advektivni enačbi zanemarili advektivni in časovni člen ter izvore. V enačbi ostane le difuzijski člen. Obdelali bomo dva primera. V prvem primeru od kraja odvisne difuzivnosti enačba fizikalno predstavlja prevod skozi nehomogeno steno. V drugem pa bo difuzivnost odvisna od same veličine, ki difundira. Primerjali smo rezultate z linearnimi interpolacijskimi funkcijami nasproti kvadratnim in ugotovili, da kvadratni mnogo bolj opišejo rešitev. Nadalje bomo obravnavali vstopni problem. Tu gre za difuzijo skalarja ob prisotnosti stalne konvektivne hitrosti. Primer smo obravnavali s stalno in krajevno odvisno difuzivnostjo. Sledi časovno odvisno reševanje difuzijske enačbe. V tem razdelku bomo izbrali najprimernejšo diskretizacijsko shemo za aproksimacijo parcialnega odvoda veličine po času. Z reševanjem enačbe nihanja pa preverimo pravilnost difuzijske enačbe z izvorom, ki je odvisen od veličine same. Po diskretizaciji časovnega odvoda v našo enačbo vstopi prav tak člen. Nadalje se bomo posvetili analitični rešitvi časovno odvisnih Navier-Stokesovih enačb. Taylor je med dvema valjema opazil nastanek vrtincev. V dveh dimenzijah je problem analitično rešljiv, tako da tokovno polje, ki je rešitev časovno odvisnih Navier-Stokesovih enačb, lahko primerjamo z analitičnimi vrednostmi. Tok preko valja pri Reynoldsovem številu $Re = 100$ je laminaren in nestacionaren. S primerjavo časovne odvisnosti koeficientov upora in vzgona na valj s preverjenimi rešitvami smo dokazali pravilnost numeričnega algoritma.

Preizkus reševanja s pomočjo valčne transformacije smo izvedli trikrat. Naprej smo preverjali samo natančnost izračuna produkta matrika vektor z naključnimi vektorji in tako pokazali priporočljivo stopnjo zanemarjanja elementov v matriki. Med klasična primera laminarnih tokov za preverjanje numeričnih shem gotovo sodita tok v gnani kotanji in tok preko stopnice. Oba smo računali pri visokih vrednostih Reynoldsovega števila in različnih stopnjah zanemarjanja elementov v valčno transformirani matriki. S pomočjo primerjave rezultatov s preverjenimi rešitvami smo določili največjo stopnjo zanemarjanja, ki še nima vpliva na rezultate pri visokih vrednostih kriterialnega števila.

5.2 Prevod toplote v nehomogeni steni

Rešujemo prevod skalarne količine v nehomogenem mediju. Splošna difuzijsko konvektivna enačba se za ta primer zapiše:

$$\vec{\nabla} T \cdot (a(\vec{r})\vec{\nabla} T) = 0, \tag{5.1}$$

kjer je T temperatura, $a(\vec{r})$ pa od kraja odvisna difuzivnost. Enačba je poenostavljena oblika difuzijsko advektivne enačbe, katere rešitev z metodo končnih elementov smo podali v prilogi A13 na strani 137.

Reševali bomo dva enodimenzionalna primera. Območje izračuna omejimo z $x_1 = 1$, kjer je temperatura $T_1 = 0$ in z $x_2 = 2$, kjer je temperatura $T_2 = 1$. Odvisnosti difuzivnosti od kraja in analitične rešitve ter odvodi so podani v tabeli 5.1.

Tabela 5.1: Obravnavana primera prevoda toplote v nehomogeni steni.

Primer	difuzivnost	1D enačba	analitična rešitev	odvod
a)	$a(x) = x$	$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) = 0$	$T(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$	$dT/dx = \frac{1}{x \ln x}$
b)	$a(x) = x^2$	$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dT}{dx}\right) = 0$	$T(x) = 2 - \frac{2}{x}$	$dT/dx = \frac{2}{x^2}$

Izračune smo za oba primera ponovili s šestimi mrežami. Tri mreže z linearnimi interpolacijskimi funkcijami za kvadratno notranjo celico in tri mreže s kvadratnimi interpolacijskimi funkcijami za Lagrangeevo notranjo celico (priloga A4 na strani 114).

V tabeli 5.2 primerjamo temperaturo v sredini območja ter odvoda na robu. Vrednost temperature v sredini je zelo dobro ocenjena na vseh mrežah, medtem ko so odvodi neprimerno bolje ocenjeni pri uporabi kvadratnih interpolacijskih funkcij.

5.3 Prevod toplote z nelinearno difuzivnostjo

Tokrat naj bo difuzivnost nelinearna funkcija temperature $a = a(\vec{r}, T)$. Ker se po območju temperatura spreminja, je difuzivnost tako odvisna tudi od kraja. Difuzijska enačba za ta primer je:

$$\vec{\nabla} T \cdot (a(\vec{r}, T)\vec{\nabla} T) = 0, \tag{5.2}$$

Tabela 5.2: Primerjava temperature v sredini stene in odvodov na robovih. Uporabili smo po tri linearne in kvadratne mreže z enakim številom vozlišč v x smeri.

	a)			b)		
Mreža	$T_{x=3/2}$	$dT/dx_{x=1}$	$dT/dx_{x=2}$	$T_{x=3/2}$	$dT/dx_{x=1}$	$dT/dx_{x=2}$
lin, 2 el.	0.5833	1.1666	0.8333	0.6579	1.3158	0.6842
lin, 10 el.	0.5850	1.3746	0.7402	0.6663	1.8152	0.5272
lin, 100 el.	0.5850	1.4355	0.7232	0.6666	1.9802	0.5025
analitično	$\frac{\ln(3/2)}{\ln(2)}$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$\frac{1}{2\ln(2)}$	2/3	2	1/2
analitično	0.5850	1.4427	0.7213	0.6666	2.0000	0.5000
kva, 50 el.	0.5850	1.4426	0.7213	0.6666	1.9996	0.5000
kva, 5 el.	0.5850	1.4347	0.7200	0.6666	1.9682	0.4972
kva, 1 el.	0.5833	1.3333	0.6666	0.6563	1.6250	0.3750

Ker je difuzivnost odvisna od temperature, potrebujemo iterativni postopek, kjer izmenično izračunavamo novo temperaturno polje in novo polje difuzivnosti. V primeru prevoda skozi nehomogeno steno to ni bilo potrebno, ker difuzivnost ni bila odvisna od temperature.

Numerični preskus

Reševali bomo dva enodimenzionalna primera. Območje izračuna omejimo z $x_1 = 0$, kjer je temperatura $T_1 = 1$ in z $x_2 = 1$, kjer je temperatura $T_2 = 2$. Odvisnosti difuzivnosti od kraja in analitične rešitve ter odvodi so podani v tabeli 5.3.

Tabela 5.3: Obravnavana primera prevoda toplote z nelinearno difuzivnostjo. V primeru b dobimo analitično rešitev z reševanjem polinoma tretje stopnje.

Primer	difuzivnost	1D enačba	$T(x)$	dT/dx
a)	$a(T) = 1/T$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dx}\right) = 0$	2^x	$2^x \ln 2$
b)	$a(T) = 1 + T + T^2$	$\frac{d}{dx}\left((1 + T + T^2)\frac{dT}{dx}\right) = 0$	$2T^3 + 3T^2 + 6T = 29x + 11$	

Iterirali smo, dokler ni bila RMS razlika med temperaturnimi polji manjša od 10^{-7}. Za dosego rezultata smo potrebovali 10 iteracij. Rezultati so prikazani v tabeli 5.4. Še enkrat smo potrdili večjo natančnost izračunov ob uporabi kvadratnih interpolacijskih funkcij.

Tabela 5.4: Primerjava temperature v sredini stene in odvodov na robovih. Uporabili smo po tri linearne in kvadratne mreže z enakim številom vozlišč v x smeri.

	a)			b)		
Mreža	$T_{x=1/2}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=1}$	$T_{x=1/2}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=1}$
lin, 2 el	1.4142	0.8284	1.1715	1.5985	1.1970	0.8030
lin, 10 el	1.4142	0.7177	1.3393	1.6008	1.4945	0.7084
lin, 100 el.	1.4142	0.6955	1.3815	1.6009	1.5983	0.6922
analitično	$\sqrt{2}$	$\ln 2$	$2 \ln 2$			
analitično	1.4142	0.6931	1.3863	1.6009	1.6111	0.6905
kva, 50 el.	1.4142	0.6931	1.3863	1.6009	1.6108	0.6905
kva, 5 el.	1.4142	0.6920	1.3842	1.6009	1.5884	0.6889
kva, 1 el.	1.4147	0.6588	1.3412	1.5988	1.3951	0.6049

5.4 Vstopni problem

Zapišimo stacionarno difuzijsko konvektivno enačbo za prenos skalarja v območju s stalno konvektivno hitrostjo $\vec{v} = v_0$:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \vec{\nabla} \cdot (a(\vec{r})\vec{\nabla}T). \tag{5.3}$$

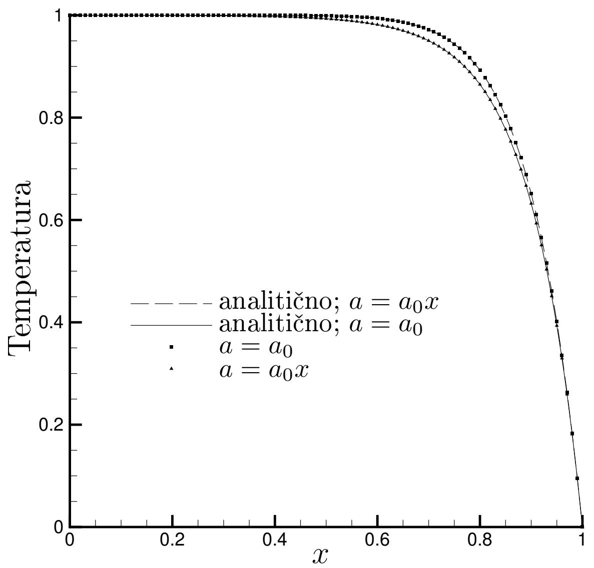
Pišemo $a(\vec{r}) = a_0 f(\vec{r})$ in definiramo Peclejevo število kot razmerje med konvektivno hitrostjo in difuzivnostjo $Pe = \frac{v_0}{a_0}$. Obravnavali smo primer z od kraja neodvisno difuzivnostjo in primer s krajevno odvisno difuzivnostjo. Podrobnosti so navedene v tabeli 5.5.

Tabela 5.5: Obravnavana vstopna problema. V primeru a je difuzivnost konstanta, v primeru b pa odvisna od kraja.

Primer	difuzivnost	1D enačba	analitična rešitev	odvod
a)	$a(\vec{r}) = a_0$	$Pe\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{d^2T}{dx^2}$	$T(x) = 1 - \dfrac{1 - e^{Pex}}{1 - e^{Pe}}$	$dT/dx = Pe\dfrac{e^{Pex}}{1 - e^{Pe}}$
b)	$a(\vec{r}) = a_0 x$	$Pe\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dT}{dx}\right)$	$T(x) = 1 - x^{Pe}$	$dT/dx = -Pex^{Pe-1}$

Primerjali smo analitične in izračunane temperaturne krivulje za Peclejevo število $Pe = 10$ na mreži s 50 kvadratnimi elementi (101 vozlišče v x smeri). Na sliki 5.1 so krivulje prikazane.

V tabeli 5.6 so prikazane vrednosti temperature in odvodov. Opazimo odlično ujemanje temperature in nekoliko slabše ujemanje odvodov, kar je slabost metode končnih elementov, pri kateri odvodi funkcije ne nastopajo v sistemu enačb. Za razliko, metoda robnih elementov poveže funkcijo z njenim odvodom na robu.



Slika 5.1: Primerjava porazdelitve temperature pri $Pe = 10$. S črtama sta označeni analitični krivulji, s kvadratki so podani rezultati numerične simulacije primera b) z difuzivnostjo odvisno od kraja, s trikotniki pa je prikazan primer a).

Tabela 5.6: Primerjava temperature v sredini stene in odvodov na robovih za vstopna problema.

		a)			b)		
Pe	Mreža	$T_{x=1/2}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=1}$	$T_{x=1/2}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=1}$
10	kva, 50 el.	0.9933	-0.0005	-9.9703	0.9990	10^{-11}	-9.9779
10	analitično	0.9933	-0.0005	-10.0005	0.9990	0	-10

5.5 Časovno odvisno reševanje difuzijske enačbe

Preveriti smo želeli natančnost časovno odvisnega izračuna s primerjavo implicitnih diskretizacijskih shem in eksplicitne sheme Runge Kutta. Izbrali smo enodimenzionalni primer ohlajanja. Rešujemo časovno odvisno difuzijsko enačbo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.4}$$

s konstantno difuzivnostjo a.

Implicitne časovne sheme

Primerjali bomo sledeče aproksimacije časovnega dovoda. Aproksimacijo prvega reda natančnosti "backward Euler"

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}, \tag{5.5}$$

drugo redno trapezoidno shemo

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{1}{2}\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{T^{n+1} - T^{n-1}}{\Delta t}, \tag{5.6}$$

in tri točkovno shemo drugega reda

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{3T^{n+1} - 4T^n + T^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{5.7}$$

kjer je Δt časovni korak, T^{n+1} temperatura v naslednjem časovnem koraku, T^n temperatura v sedanjem časovnem koraku in T^{n-1} temperatura v prejšnjem časovnem koraku.

Eksplicitna časovna shema Runge Kutta

Ogledali smo si Runge Kutta numerično shemo s 4 redom natančnosti. Shema je eksplicitna, zatorej s pomočjo odvoda funkcije v danem trenutku ciljamo na vrednost funkcije v naslednjem. V nasprotju s tem, implicitne sheme za oceno odvoda uporabijo vrednost funkcije v naslednjem časovnem koraku, kar neizbežno privede do reševanja implicitnega sistema enačb.

Časovno odvisno difuzijsko enačbo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.8}$$

sedaj rešujemo tako, da izračunamo $a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ z začetno porazdelitvijo temperatur in uporabimo Runge Kutta shemo za napredovanje v naslednji časovni korak. Shema je sledeča (Press et al. [89]):

1. $T^{(1)} = T^n + \frac{1}{4}\Delta t \left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]^n$

2. $T^{(2)} = T^n + \frac{1}{3}\Delta t \left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]^{(1)}$
3. $T^{(3)} = T^n + \frac{1}{2}\Delta t \left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]^{(2)}$
4. $T^{n+1} = T^n + \Delta t \left[a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]^{(3)}$

Velikost koraka pri Runge Kutta shemi je omejena z Courant-Friedrichs-Lewy stabilnostnim pogojem:

$$\Delta t \leq \frac{\nu \Delta x}{\delta}, \tag{5.9}$$

kjer je $\nu < 1$ Courant-Friedrichs-Lewy število, δ pa karakteristična hitrost.

Numerični preskus

Obravnavamo 1D primer ohlajanja izolirane nitke na intervalu med $[0, \pi]$. Prevodnost (difuzivnost) je konstantna $a = 1$. Začetni profil temperature je trikoten z maksimalno temperaturo $T_m = 1$ v točki $x = \pi/2$ in sicer:

$$T(x,0) = \begin{cases} 2T_m\frac{x}{\pi}, & x \in (0, \pi/2); \\ 2T_m\frac{\pi - x}{\pi}, & x \in (\pi/2, \pi). \end{cases} \tag{5.10}$$

Na obeh koncih predpišemo temperaturo $T_0 = 0$, na straneh pa je območje izolirano. Analitična rešitev zgoraj opisanega primera (Weisstein [139]) je:

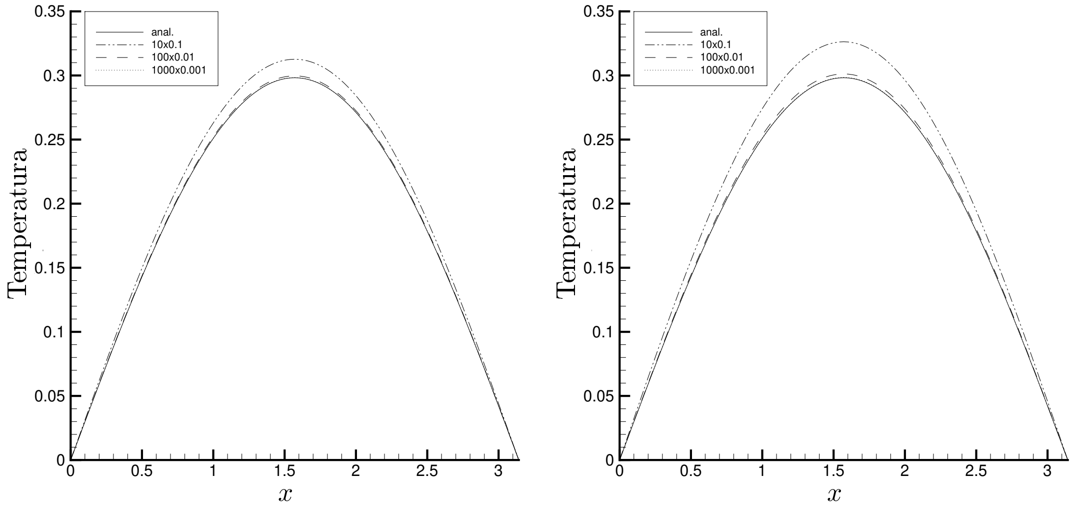
$$T(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2\int_0^{\pi/2}\sin(nx)\frac{x}{\pi}dx + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)x\frac{\pi - x}{\pi}dx\right\}\sin(nx)e^{-n^2 t}. \tag{5.11}$$

Temperaturni profil smo primerjali z analitičnim pri času $t = 1$. Računali smo na mreži s 100 kvadratnimi elementi (201 vozlišče) v x smeri in z različnimi časovnimi koraki. V tabeli 5.7 so prikazane vrednosti temperature $T(\pi/2, 1)$. Temperaturne profile smo prikazali tudi

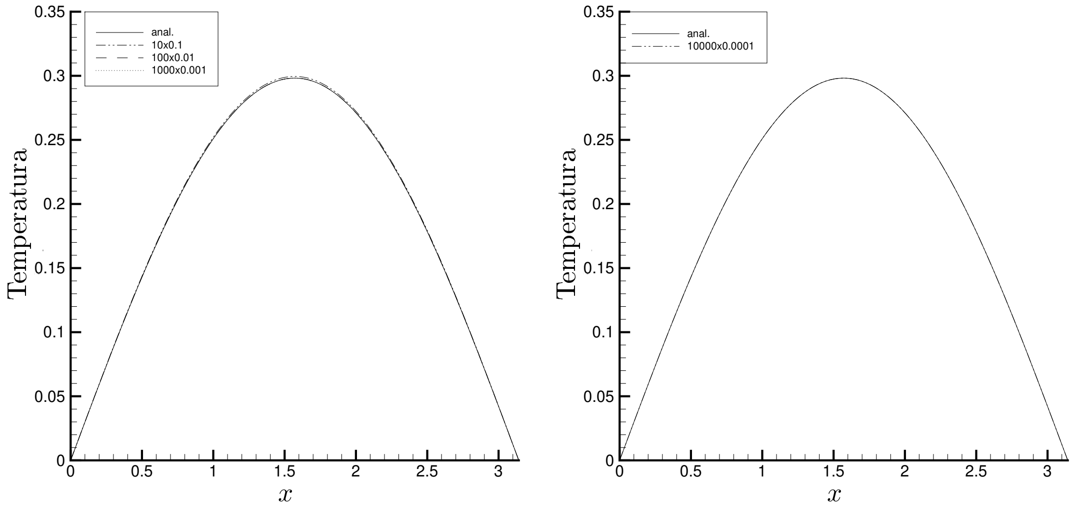
Tabela 5.7: Primerjava temperature v sredini pri časovno odvisnem reševanju difuzijske enačbe.

Δt	št. korakov	BE	trapez	3 točke	RK4
0.1	10	0.3127	0.3263	0.2995	
0.01	100	0.2997	0.3012	0.2982	
0.001	1000	0.2984	0.2985	0.2982	
0.0001	10^4				0.2982
analitično		0.2982	0.2982	0.2982	0.2982

na slikah 5.2 in 5.3. Rezultati pokažejo, da je med implicitnimi shemami daleč najboljša tri točkovna shema (5.7). Eksplicitna shema sicer tudi dosega dobro natančnost, vendar pa zahteva več časovnih korakov zaradi Courant-Friedrichs-Lewy (5.9) pogoja.



Slika 5.2: Časovno odvisno reševanje difuzijske enačbe. Primerjava analitičnih temperaturnih profilov z numeričnimi za različne diskretizacije parcialnega odvoda po času: levo "backward Euler" in desno trapezna shema.



Slika 5.3: Časovno odvisno reševanje difuzijske enačbe. Primerjava analitičnih temperaturnih profilov z numeričnimi za različne diskretizacije parcialnega odvoda po času: levo tri točkovna shema in desno algoritem Runge Kutta (desno).

5.6 Reševanje enačbe nihanja

V difuzijsko konvektivni enačbi je časovni odvod polja, ki je po diskretizaciji sorazmeren s samim poljem. Za testiranje reševanja enačbe s spremenljivimi koeficientom bomo izpustili difuzijski člen. Reševali bomo enodimenzijsko enačbo oblike

$$f(x)T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5.12}$$

za tri primere. Prvi bo klasična enačba nihanja s konstantno frekvenco $f(x) = \omega_0^2 = 1$, pri drugih dveh pa bo $f(x)$ odvisen od kraja. Podrobnosti in analitične rešitve so podani v tabeli 5.8.

Tabela 5.8: Obravnavani primeri reševanja enačbe nihanja

Primer	koeficient $f(x)$	anal. rešitev $T(x)$	odvod dT/dx	območje	robna pogoja
a)	1	$\cos x$	$-\sin x$	$0 \ldots \frac{\pi}{2}$	$1 \ldots 0$
b)	$-2(2x^2 + \tan x^2)$	$\cos x^2$	$-2x \sin x^2$	$0 \ldots \frac{\pi}{4}$	$1 \ldots \cos \frac{\pi^2}{16}$
c)	$-\frac{5}{4x}\left(5 - \frac{\tan\sqrt{25x}}{\sqrt{x}}\right)$	$\cos\sqrt{25x}$	$-\frac{5\sin\sqrt{25x}}{2\sqrt{x}}$	$1 \ldots 2$	$\cos 5 \ldots \cos 5\sqrt{2}$

Tabela 5.9: Primerjava analitičnih in izračunanih vrednosti za vse tri primere enačbe nihanja.

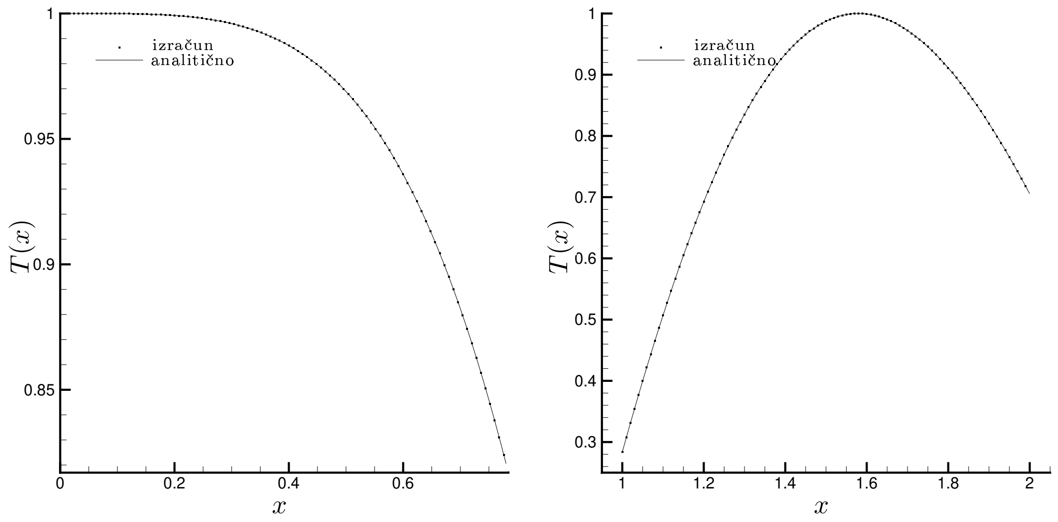
primer a			
	$T_{x=\pi/4}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=\pi/2}$
izračunano	0.7071	$-2.1 \cdot 10^{-6}$	-1.0000
analitično	0.7071	0	-1
primer b			
	$T_{x=\pi/8}$	$dT/dx_{x=0}$	$dT/dx_{x=\pi/4}$
izračunano	0.9881	$1.5 \cdot 10^{-6}$	-0.9085
analitično	0.9881	0	-0.9087
primer c			
	$T_{x=3/2}$	$dT/dx_{x=1}$	$dT/dx_{x=2}$
izračunano	0.9873	2.3976	-1.2533
analitično	0.9873	2.3973	-1.2531

Rezultati so predstavljeni v tabeli 5.8 in na sliki 5.4. Vidimo odlično ujemanje, kar dokazuje pravilno delovanje napisanega podprograma.

V eni dimenziji na območju $[0,1]$ rešujemo sledeči enačbi z rešitvama:

$$u = \frac{x^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad u = x^2, \tag{5.13}$$

$$u = \frac{x^2}{12}\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad u = x^4. \tag{5.14}$$



Slika 5.4: Grafična primerjava analitičnega in izračunanega poteka funkcije $T(x)$; za primer b (levo) in primer c (desno).

Robna pogoja sta pri $u(0) = 1$ in $u(1) = 1$. Uporabili smo mrežo z desetimi ekvidistantnimi kvadratnimi celicami. Rezultati so v tabeli 5.10.

Tabela 5.10: Primerjava analitičnih in izračunanih vrednosti za rešitev enačb (5.13) in (5.14).

	enačba (5.13)				
	$x = 0.01$	$x = 0.1$	$x = 0.5$	$x = 0.9$	$x = 0.99$
izračunano	0.0005	0.01	0.25	0.81	0.9805
analitično	0.0001	0.01	0.25	0.81	0.9801
	enačba (5.14)				
	$x = 0.01$	$x = 0.1$	$x = 0.5$	$x = 0.9$	$x = 0.99$
izračunano	10^{-22}	0.00012	0.06252	0.656109	0.9629
analitično	10^{-8}	0.0001	0.0625	0.6561	0.9606

5.7 Taylorjevi vrtinci

Stabilnostne analize Couettovega toka med dvema valjema so pokazale možnost pojava t.i. Taylor-jevih vrtincev [127]. Periodični, v nasprotno stran vrteči se vrtinci, ki pojemajo s časom zaradi viskoznosti, so rešitev Navier-Stokesovih enačb. Na območju $[0, 1; 0, 1]$ je analitična rešitev za hitrostno polje enaka

$$v_x = -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)e^{-\frac{8\pi^2}{Re}t}, \tag{5.15}$$

$$v_y = +\cos(2\pi y)\sin(2\pi x)e^{-\frac{8\pi^2}{Re}t}, \tag{5.16}$$

medtem ko sta vrtinčno polje in tokovna funkcija enaki

$$\omega = 4\pi\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)e^{-\frac{8\pi^2}{Re}t}, \tag{5.17}$$

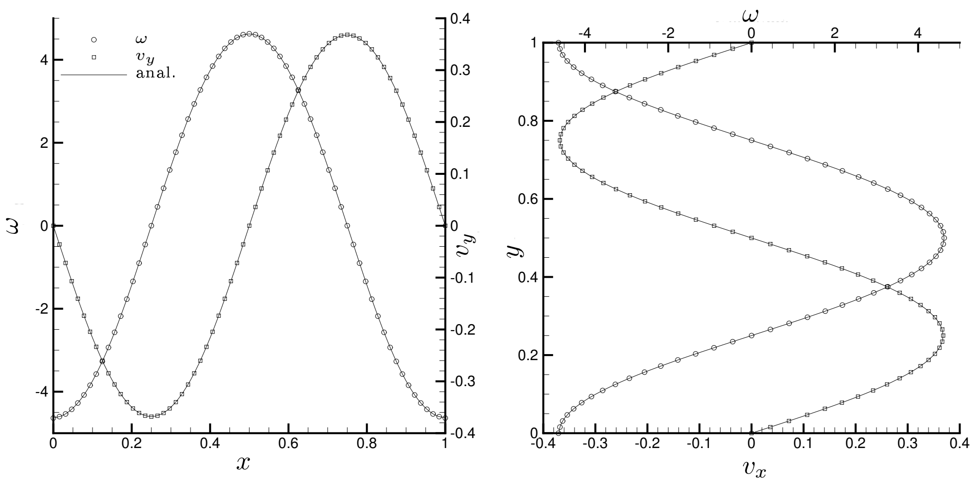
$$\psi = \frac{\omega}{8\pi^2}. \tag{5.18}$$

Navedene zveze za vrtinčno in hitrostno polje so rešitve tako enačbe prenosa vrtinčnosti kot enačb kinematike.

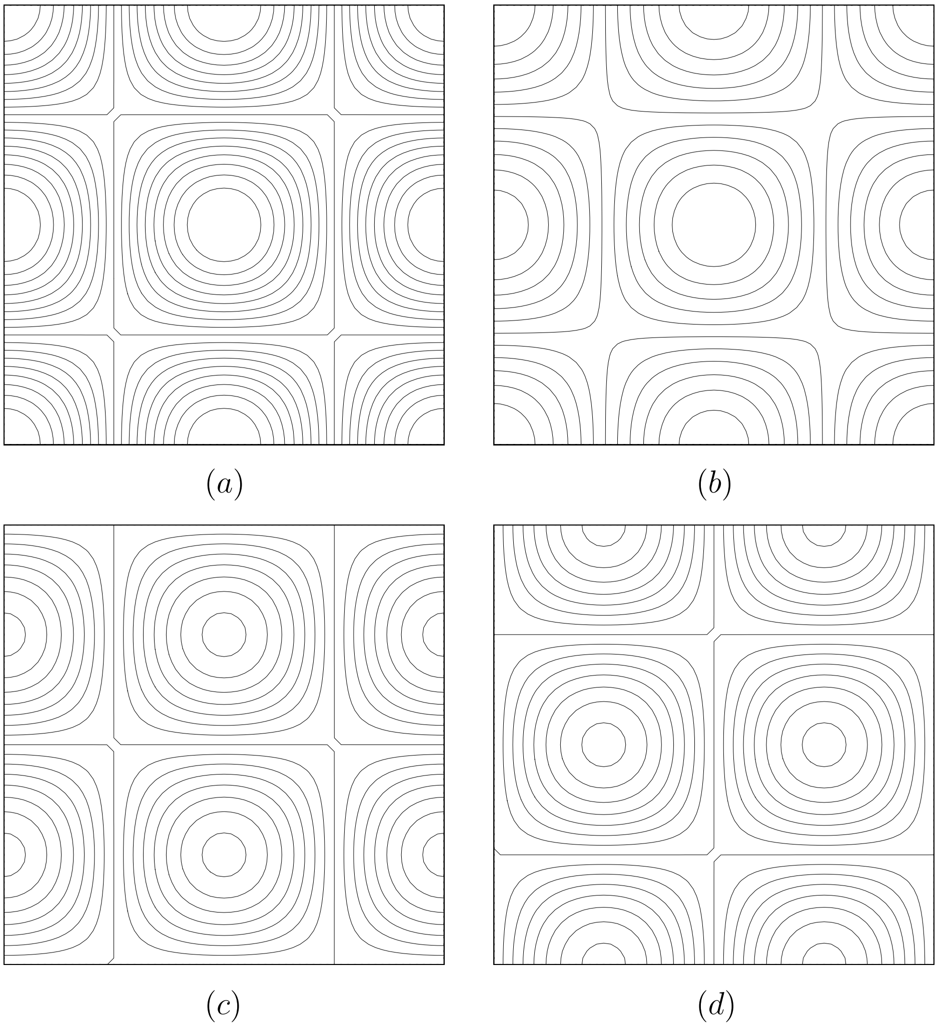
Primer smo računali pri Reynoldsovem številu $Re = 8\pi^2$. Izbrali smo časovni korak $\Delta t = 0.01$ in računali na mreži z 32×32 kvadratnimi celicami. Rezultate primerjamo pri $t = 0.5s$ in $t = 1s$ v tabeli 5.11. Vrtinčno in hitrostno polje ter tokovnice so prikazane na sliki 5.6. Profila hitrosti in vrtinčnosti grafično primerjamo z analitičnimi vrednostmi na sliki 5.5.

Tabela 5.11: Primerjava analitičnih in izračunanih vrednosti za Taylorjev problem pri $Re = 8\pi^2$.

	$\omega(1/2,1/2)$		$v_x(1/2,1/4)$		$v_y(3/4,1/2)$	
	t=0.5s	t=1.0s	t=0.5s	t=1.0s	t=0.5s	t=1.0s
izračunano	7.6252	4.6266	0.6068	0.3681	0.6068	0.3681
analitično	7.6219	4.6229	0.6065	0.3679	0.6065	0.3679
analitično	$\frac{4\pi}{\sqrt{e}}$	$\frac{4\pi}{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{e}$



Slika 5.5: Taylorjev problem pri $Re = 8\pi^2$ in $t = 1$. Primerjava analitičnih in izračunanih vrednosti. Levo: vrtinčnost in hitrost v_y na profilu $(x, 0.5)$, desno vrtinčnost in hitrost v_x na profilu $(0.5, y)$.



Slika 5.6: Taylorjev problem pri $Re = 8\pi^2$ in $t = 1$. Na sliki so: (a) vrtinčnost (-4,4,17), (b) tokovna funkcija (0.01,0.11,11), (c) hitrost v_x (-0.35,0.35,15) in (d) hitrost v_y (-0.35,0.35,15).

5.8 Tok preko valja

Tokovi preko teles so izjemno zanimivi, tako za raziskovalce kot za inženirje. Uporabnost numeričnih simulacij sega od vpliva vetrov na mostove (Selvam [109]) do strukturnih analiz (Marukami and Mochida [78]). Poleg laminarnih izračunov in primerjave s preverjenimi rešitvami (Calhoun [17]), ki jih bomo opravili v tem razdelku, je zanimiv tudi turbulentni tok preko cilindra. S simulacijo velikih vrtincev v krivolinijskih koordinatah je Breuer [9, 10] obravnaval turbulenten tok preko cilindra pri $Re = 3900$ in pri $Re = 130000$. Z LES simulacijo pri $Re = 43000$ sta se ukvarjala Frölich in Rodi [38]. Rodi [102] se je ukvarjal s primerjavo rezultatov LES in RANS pri $Re = 22000$. V zadnjem času se raziskovalci ukvarjajo tudi s tokom preko nagnjene plošče. Takšne simulacije so uporabne predvsem za industrijo na področju aerodinamike. Breuer and Jovičić [12] sta izvedla LES izračun pri $Re = 20000$, kjer tekočina naleta na ploščo pod kotom 18°. Za isti primer je Breuer je s sodelavci [13] primerjal rezultate DES, RANS in LES simulacij, kjer so jasno pokazali prednost LES izračunov za modeliranje tega tipa tokov. Yu in Kareem [146] sta se ukvarjala z dvodimenzionalnim tokom preko kvadra, ki je uporaben predvsem pri študijah aerodinamičnih lastnosti stavb. Ista avtorja sta primerjala 2D in 3D turbulentne LES izračune toka preko kvadra [147]. Prav tako so se s turbulentnim tokom ukvarjali Kim in sodelavci [58]. Nevrtinčni tok okoli kvadra je z metodo robnih elementov obdelala Kramerjeva s sodelavci [64].

Pravilnost predlagane valčno stisnjene BEM - FEM numerične sheme smo preverili na dvodimenzionalnem laminarnem toku nestisljive viskozne tekočine preko valja.

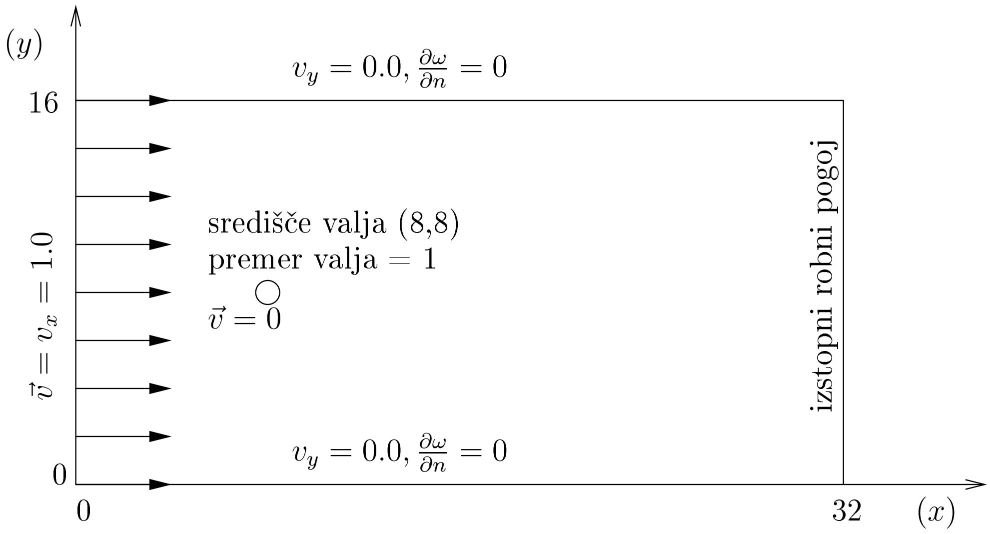
Računsko območje in robni pogoji so predstavljeni na sliki 5.7. Velikost območja je 16×32 brezdimenzijskih enot. Za dolžinsko skalo, na podlagi katere je izračunano Reynoldsovo število, smo izbrali premer valja. Valj ima torej premer 1, središče pa je v točki (8,8). Tekočina vstopa v območje na levi s konstantno hitrostjo $\vec{v} = v_x = 1.0$. Na zgornji in spodnji steni predpostavimo popolnoma razvit tok ($v_y = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$). Tekočina izstopa iz območja na desni, kjer smo uporabili konvektivni izstopni robni pogoj (Orlanski [82], Kobayashi et al. [60]). Uporabimo monokromatsko valovno enačbo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \tag{5.19}$$

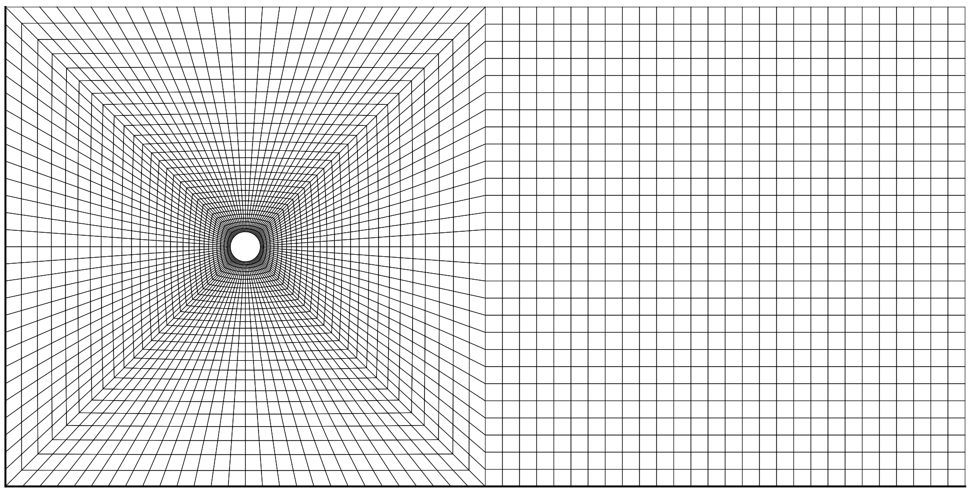
za prenos normalne komponente hitrosti in vrtinčnosti ($\phi = v_x, \omega$), od vozlišč najbližjih izstopnem robu, do vozlišč na robu. Uporabili smo hitrost toka na vstopu $c = v_x^{vstop} = 1.0$. Podrobnosti o numerični implementaciji konvektivnega izstopnega robnega pogoja so podane v prilogi A6 na strani 118.

Za izračun smo uporabili tri gostote mreže. Najredkejša mreža je imela 4060 vozlišč (glej sliko 5.8), gostejši pa 8200 in 32400. Kvantitativno primerjavo rezultatov bomo podali v obliki izračunanih koeficientov upora c_D in dinamičnega vzgona c_L telesa. Koeficienta definiramo (Škerget [118]) takole:

$$c_D = \frac{F_x}{\rho d \frac{1}{2} v_\infty^2}, \qquad c_L = \frac{F_y}{\rho d \frac{1}{2} v_\infty^2}, \tag{5.20}$$



Slika 5.7: Geometrija in robni pogoji za simulacijo toka preko valja.



Slika 5.8: Najredkejša računska mreža s 4060 vozlišči.

kjer je v_∞ hitrost tekočine pred valjem, d premer valja in ρ gostota tekočine. Silo izračunamo s

$$\vec{F} = -\int_\Gamma p d\vec{\Gamma} + \int_\Gamma \tau \cdot d\vec{\Gamma}, \tag{5.21}$$

kjer je Γ rob valja, τ pa strižni napetostni tenzor. Po komponentah imamo

$$F_x = -\int_\Gamma p n_x d\Gamma + \int_\Gamma \left(\tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y\right) d\Gamma, \tag{5.22}$$

$$F_y = -\int_\Gamma p n_y d\Gamma + \int_\Gamma \left(\tau_{yy} n_x + \tau_{yx} n_y\right) d\Gamma. \tag{5.23}$$

Napetostni tenzor za nestisljivo tekočino pa je:

$$\tau = \eta \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Napetostni tenzor (5.24) upoštevamo v silah (5.22) in (5.23) ter z upoštevanjem definicije vrtinčnosti (2.26) dobimo:

$$F_x = \int_\Gamma \left(-p n_x + 2\eta \left(n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}\right) v_x + \eta \omega n_y\right) d\Gamma, \tag{5.25}$$

$$F_y = \int_\Gamma \left(-p n_y + 2\eta \left(n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}\right) v_y + \eta \omega n_x\right) d\Gamma. \tag{5.26}$$

Ko enačbi (5.25) in (5.26) vstavimo v definicijo koeficientov (5.20) in uporabimo definiciji Eulerjevega in Reynoldsovega števila, dobimo končen izraz v vektorskem zapisu za koeficienta vzgona in upora:

$$\left\| \begin{matrix} c_D \\ c_L \end{matrix} \right\| = \int_\Gamma \left(-\frac{2}{Eu} p\vec{n} + \frac{4}{Re}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{2}{Re} \left\| \begin{matrix} n_y \\ n_x \end{matrix} \right\| \omega \right) d\Gamma. \tag{5.27}$$

V hitrostno vrtinčnem zapisu enačb tlaka ni. Izračunamo ga po koncu nelinearne zanke, iz znanega vrtinčnega in hitrostnega polja s pomočjo enačbe (2.53). Opazimo (enačba (2.52)), da je tlak sorazmeren z Eulerjevim številom. V enačbi za koeficienta vzgona in upora (5.27) pa je z njim podeljen. Torej c_D in c_L nista odvisna od Eulerjevega števila, temveč sta odvisna samo od Reynoldsovega števila.

Rezultati, $Re = 20, 40$: Tok pri $Re = 20$ in $Re = 40$ je stacionaren. V izračunih smo uporabili brezdimenzijski časovni korak $\Delta t = 1$ in dosegli stacionarno stanje po približno 100 časovnih korakih. Tokovno polje je simetrično glede na središčnico skozi cilinder $x = 8.0$, torej dinamičnega vzgona ni $c_L = 0.0$. V stacionarnem stanju smo izmerili dva dodatna parametra. Separacijski kot Θ merimo od $x = 8.0$ v smeri obratni urinemu kazalcu do točke na valju, kjer je vrtinčnost enaka nič. Recirkulacijska dolžina L je dolžina recirkulacijskega območja za valjem merjeno vzdolž premice $y = 8.0$. Izolinije vrtinčnosti in tokovnice prikazujemo na slikah 5.9 in 5.10 za $Re = 20$ in $Re = 40$. V tabeli 5.12 navajamo primerjavo separacijskega kota, recirkulacijske dolžine in koeficienta upora z

Tabela 5.12: Tok preko valja. Separacijski kot Θ, recirkulacijska dolžina L in koeficient upora c_D za $Re = 20$ in $Re = 40$.

	Re=20			Re=40		
	L	$\Theta[^o]$	c_D	L	$\Theta[^o]$	c_D
Tritton [131] (eksp)	-	-	2.22	-	-	1.48
Coutanceau [23] (eksp)	0.73	42.3	-	1.89	52.8	-
Fornberg [34] (num)	0.91	-	2.00	2.24	-	1.50
Dennis [31] (num)	0.94	43.7	2.05	2.35	53.8	1.52
Calhoun [17] (num)	0.91	45.5	2.19	2.18	54.2	1.62
Ramšak [92] (num)	0.94	43.0	2.14	2.27	53.3	1.59
BEM-FEM N=4.060	0.93	43.59	2.16	2.23	53.93	1.57
BEM-FEM N=8.200	0.93	43.86	2.20	2.23	53.80	1.61
BEM-FEM N=32.400	0.94	44.04	2.23	2.24	53.99	1.65

rezultati drugih avtorjev. Vidimo, da se naši rezultati zelo dobro ujemajo z referenčnimi preverjenimi rešitvami.

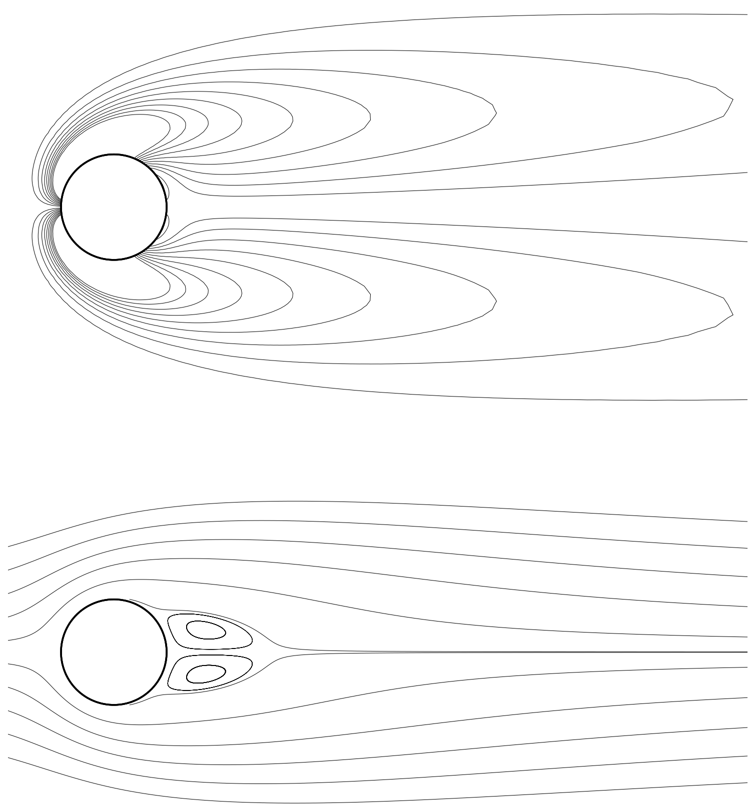
Rezultati, $Re = 100$: Pri $Re = 100$ je tokovno polje za valjem nestacionarno. Sistem začne oscilirati po približno času 100. Izračunali smo 2000 časovnih korakov, s ΔT=0.1. Časovno odvisnost koeficienta dinamičnega vzgona opišemo s Strouhalovim številom,

$$St = \frac{d}{v_\infty t_0}, \tag{5.28}$$

kjer je t_0 perioda trganja vrtincev. Izolinije vrtinčnosti in tokovnice ob $t = 200$ prikazujemo na sliki 5.11. Koeficient upora, amplituda koeficienta dinamičnega vzgona in Strouhalovo število pa so podani v tabeli 5.13. Časovno odvisnost obeh koeficientov prikazujemo na sliki 5.12. Opazimo lahko, da je frekvenca nihanja koeficienta upora točno dvakratnik frekvence nihanja koeficienta dinamičnega vzgona.

Tabela 5.13: Tok preko valja. Koeficient upora c_D, amplituda koeficienta dinamičnega vzgona c_L in Strouhalovo število St za $Re = 100$.

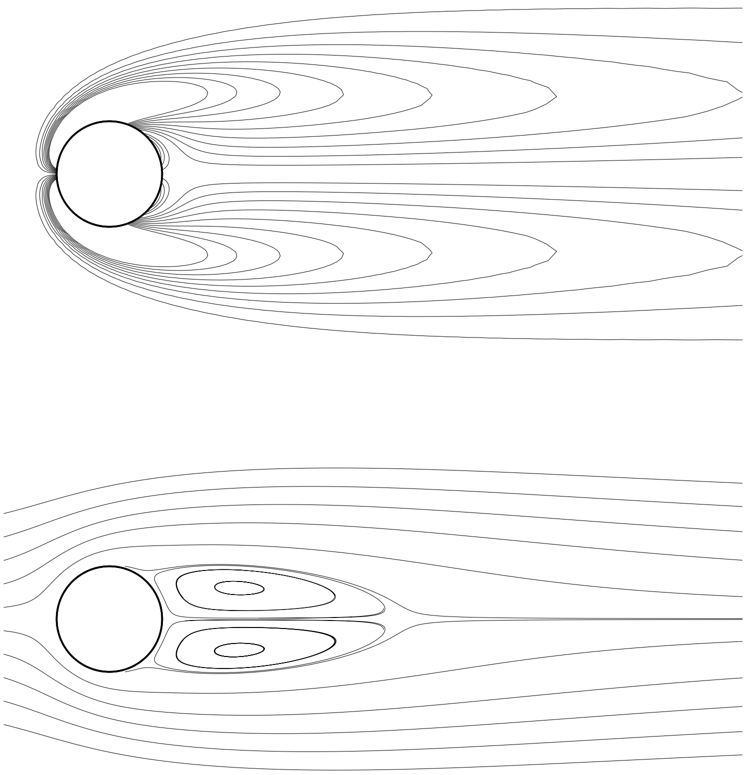
	Re=100		
	c_D	c_L	St
Calhoun [17] N=204.800	1.330 ± 0.014	± 0.298	0.175
Braza [8] (num)	1.364 ± 0.015	± 0.25	-
Liu [69] (num)	1.350 ± 0.012	± 0.339	0.164
Ramšak [92] N=112.500	1.283 ± 0.007	± 0.149	0.168
BEM-FEM N=4.060	1.217 ± 0.003	± 0.186	0.159
BEM-FEM N=8.200	1.250 ± 0.0026	± 0.190	0.158
BEM-FEM N=32.400	1.300 ± 0.006	± 0.195	0.159



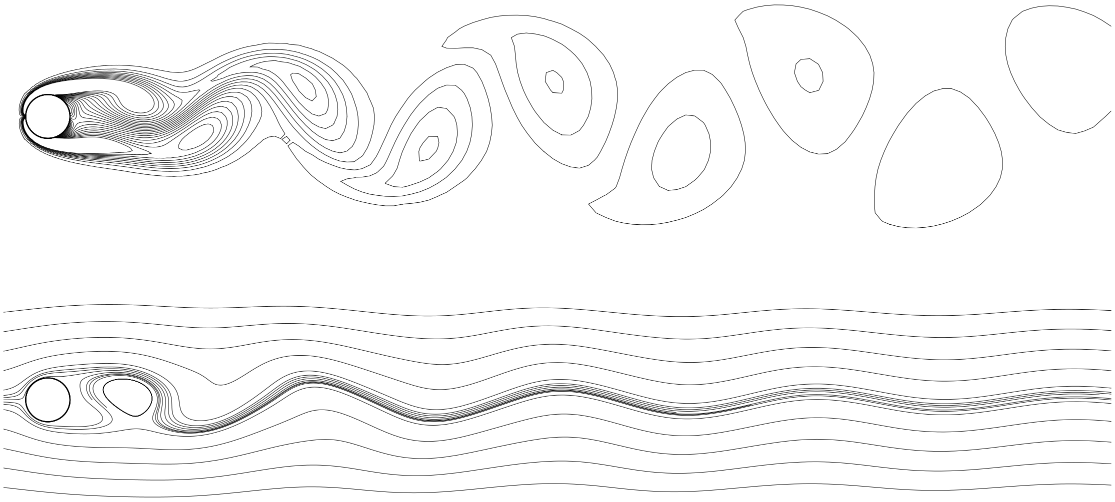
Slika 5.9: Izolinije vrtinčnosti (zgoraj) in tokovnice (spodaj) za $Re = 20$.

Pogled na rezultate v tabeli 5.13 nam razkrije, da se Strouhalovo število dobro ujema z referenčnimi rezultati drugih avtorjev. Koeficient upora c_D in amplituda c_L pa sta rahlo nižja od referenc.

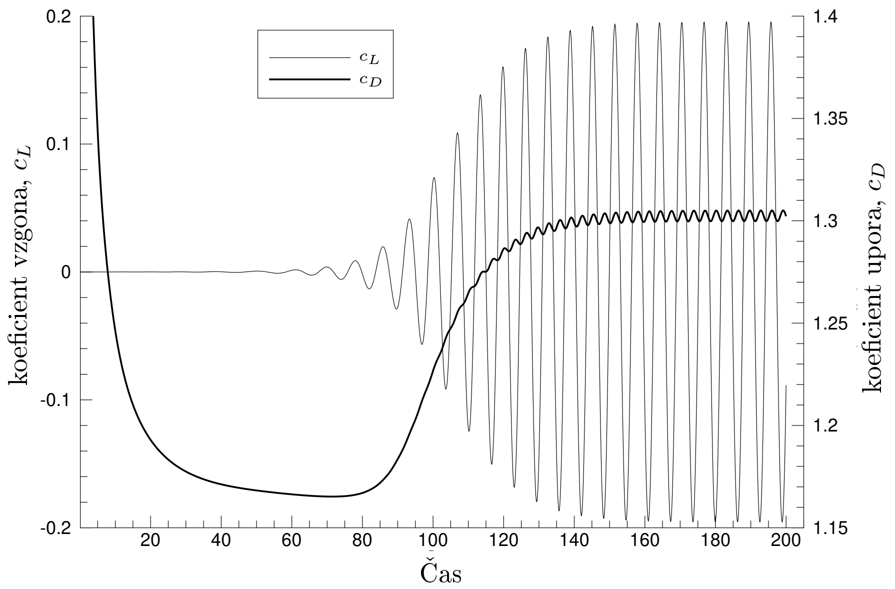
Tok smo prikazali tudi z brez masnimi delci. Delce smo v tok vnašali pred valjem in časovno odvisno računali njihov položaj. Rezultati pri $Re = 100$ so prikazani na sliki 5.13. Numerični algoritem izračuna položajev in toka brez masnih delcev smo predstavili v prilogi A7 na strani 119.



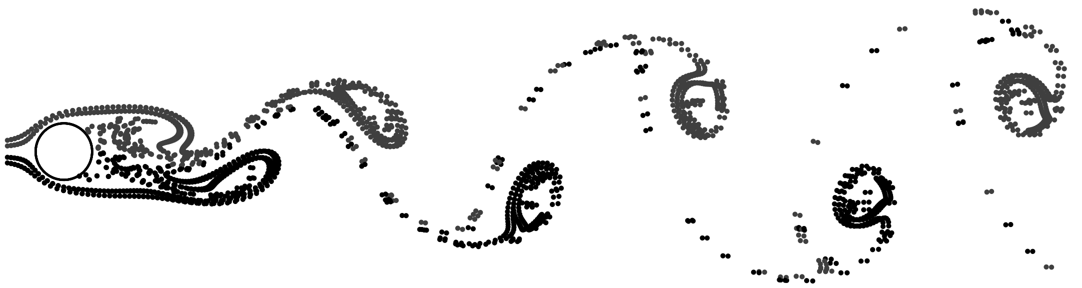
Slika 5.10: Izolinije vrtinčnosti (zgoraj) in tokovnice (spodaj) za $Re = 40$.



Slika 5.11: Izolinije vrtinčnosti (zgoraj) in tokovnice (spodaj) za $Re = 100$ ob $t = 200$.



Slika 5.12: Nestisljiv tok preko valja. Koeficienta upora c_D in dinamičnega vzgona c_L v odvisnosti od časa, $Re = 100$.



Slika 5.13: Nestisljiv tok preko valja pri $Re = 100$. Prikaz toka z brez masnimi delci.

5.9 Testiranje natančnosti izračuna produkta matrike z vektorjem

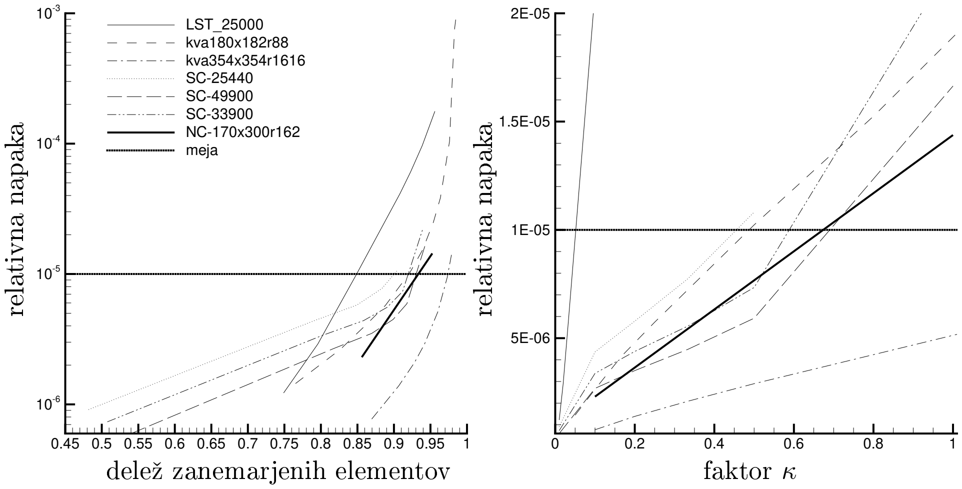
Matrično vektorski produkt, ki ga moramo izračunati za rešitev enačbe kinematike z metodo robnih elementov (4.19), sestavlja matrika integralov in vektor vrtinčnosti. Matrika integralov je odvisna samo od geometrije računske mreže. Da bi lahko zagotovili mero za natančnost izračunanega matrično vektorskega produkta, med postopnim zanemarjanjem elementov matrike, računamo relativno napako pri množenju z naključnimi vektorji. Relativno napako izračunamo po sledečem postopku:

$$\epsilon = \frac{\sum_i \left|[D^{\Omega\setminus\Gamma}]\vec{f_i} - W^T[D_W^{\Omega\setminus\Gamma}]W\vec{f_i}\right|}{\sum_i \left|[D^{\Omega\setminus\Gamma}]\vec{f_i}\right|}. \tag{5.29}$$

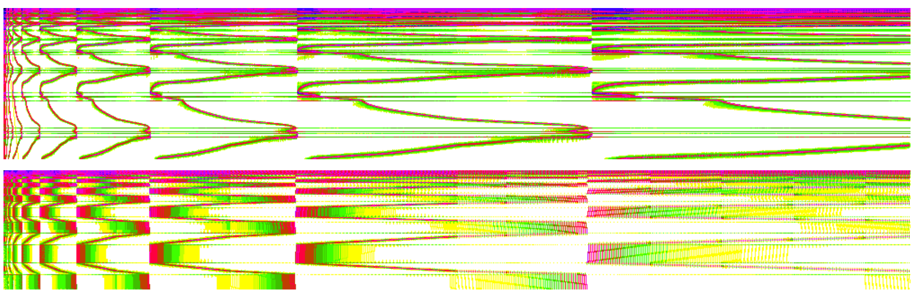
Vpliv zanemarjanja elementov v matriki smo testirali za različne geometrije in gostote mrež. Podatki o uporabljenih mrežah so v tabeli 5.14. Mreže z oznako *kva* so kvadratne oblike, mreža *NK* in *LST* sta pravokotnika z razmerjem stranic 1 : 4 oziroma 30 : 1, mreže *SC* pa so namenjene simulaciji toka preko plitve kotanje. Vse naštete tipe mrež smo uporabili pri izračunih v tej disertaciji. Rezultati merjenja relativne napake pri množenju stisnjene matrike z vektorjem pa so na sliki 5.14. Opazimo, da za dosego enake stopnje natančnosti produkta, višja gostota mreže pri enaki geometriji omogoča višjo stopnjo stiskanja. Hkrati vidimo, da ima tudi tip geometrije mreže velik vpliv na napako. Za doseganje enake natančnosti smo pri mreži za tok preko stopnice morali zanemariti veliko manjši del elementov kot npr. v plitvi kotanji. Dokazali smo tudi linearno odvisnost napake od faktorja κ in več kot eksponentno odvisnost od deleža zanemarjenih elementov. Tako lahko s predpisovanjem faktorja κ lažje zanemarimo pravilno število elementov v matriki in s tem dosegamo želeno natančnost. Odvisnost $\epsilon(\kappa)$ je torej premica skozi izhodišče. Njen naklon je močno odvisen od geometrije mreže. Izpraznjenost matrik prikazujemo na sliki 5.15.

Tabela 5.14: Mreže, ki smo jih uporabili za testiranje valčno transformiranega produkta matrike z vektorjem.

ime mreže	tip geometrije	število vozlišč	število procesorjev
LST_25000	stopnica	101101	4
kva180x182r88	kvadratna kotanja	131765	4
kva354x354r1616	kvadratna kotanja	502681	32
SC-25440	plitva kotanja	102593	4
SC-33900	plitva kotanja	136601	6
SC-49900	plitva kotanja	200815	8
NC-170x300r162	kotanja 1 : 4	204941	8



Slika 5.14: Relativna napaka pri množenju stisnjene matrike z naključnimi vektorji. Levo je prikazana odvisnost napake od deleža zanemarjenih elementov v matriki, na desni pa odvisnost od faktorja κ. Na sliki je označena meja $\epsilon = 10^{-5}$, za katero smo v nadaljevanju poglavja ugotovili, da ne povzroča vpliva na rezultate simulacij za visoke vrednosti kriterialnih števil.

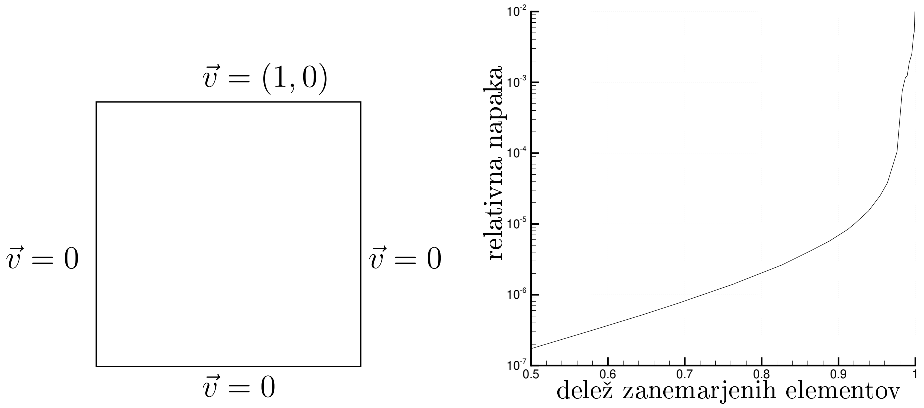


Slika 5.15: Predstavitev izpraznjenosti valčno stisnjenih matrik. Zgoraj mreža SC-25440, spodaj pravokotna mreža z NC-128x200r81. Približno 1000 elementov matrike prikazujemo z eno piko na sliki. Samo če je vseh 1000 elementov enakih nič, pike ni na sliki. Intenzivnost barve pike opisuje absolutno velikost največjega elementa. Matriki sta izpraznjeni do $\epsilon = 10^{-5}$.

5.10 Gnani tok v kotanji

Eden izmed standardnih primerov za testiranje uspešnosti algoritmov v dinamiki tekočin je tok v gnani kotanji. Na zgornji strani kotanje je predpisan stalen tok v vodoravni smeri, ki povzroči nastanek vrtinca v kotanji. Primer je zelo natančno raziskal Ghia s sodelavci [42]. Preverjeno rešitev Ghie za primerjavo in validacijo numeričnih shem uporablja veliko število avtorjev (Peng et al. [86], Ramšak in Škerget [92], Hriberšek in Škerget [53]). Na sliki 5.16 je kotanja, skicirana z robnimi pogoji.

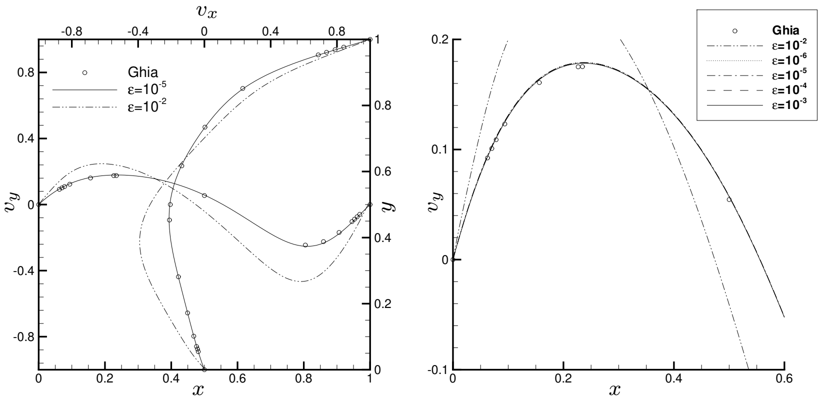
Matriko območnih integralov, ki izhaja iz BEM rešitve enačbe kinematike, smo zanemarili do različnih stopenj natančnosti, glede na produkt z naključnimi vektorji. Podatki o mreži in zanemarjanju so v tabeli 5.15 in na sliki 5.16. Pri $Re = 100$ smo izračun začeli z mirujočo tekočino, pri višjih Re številih pa smo za začetni približek uporabili hitrostno polje pri prvem manjšem Re številu. Hitrostna profila po sredini kotanje prikazujemo za Reynoldsova števila $Re = 100$ (slika 5.17), $Re = 1000$ (slika 5.18), $Re = 3200$ (slika 5.19), $Re = 5000$ (slika 5.20), $Re = 7500$ (slika 5.21) in $Re = 10000$ (slika 5.22). Pri najmanjšem Reynoldsovem številu se pokrijejo vsi profili, razen največje stopnje zanemarjanja. Že pri tako majhnem Re številu je vpliv zanemarjanja pri $\epsilon \approx 10^{-2}$ prevelik. S to stopnjo zanemarjanja nismo računali pri višjih Reynoldsovih številih. Pri $Re = 1000$ vidimo, da se spet vsi profili pokrijejo. Dogodi se celo, da je izračun pri večji stopnji zanemarjanje za odtenek bolj blizu preverjeni rešitvi kot pri manjši stopnji. Ta pojav razlagamo z dejstvom, da je napaka izračuna naključna in da je v tem primeru delovala v pravo smer. Pri $Re = 3200$ se pokaže pravi trend. Čeprav so še vedno vsi štirje profili zelo blizu preverjene rešitve pa opazimo, da se profila za $\epsilon \approx 10^{-5}$ in $\epsilon \approx 10^{-6}$ popolnoma pokrivata in sta najbližje referenci, medtem ko večji stopnji zanemarjanja odstopata. V višjih Re številih prav tako ugotovimo, da se profila za $\epsilon \approx 10^{-5}$ in $\epsilon \approx 10^{-6}$ pokrivata, kar nam dokazuje, da pri zanemarjanju do $\epsilon \approx 10^{-5}$ še ne vpeljujemo napake v izračun. Zato smo se v nadaljnjih izračunih odločili za stopnjo zanemarjanja $\epsilon \approx 10^{-5}$.



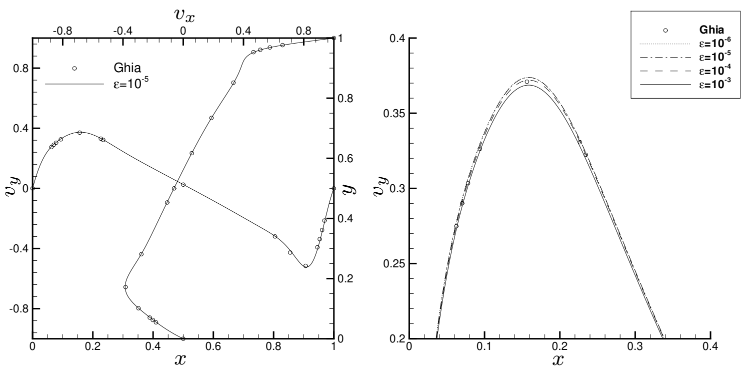
Slika 5.16: Skica kotanje z robnimi pogoji (levo). Relativna napaka pri množenju stisnjene matrike z naključnimi vektorji na mreži 182x180r88 (desno).

Tabela 5.15: Zanemarjanje matrike območnih integralov na mreži 182x180r88. Vseh elementov v matriki je 188699016.

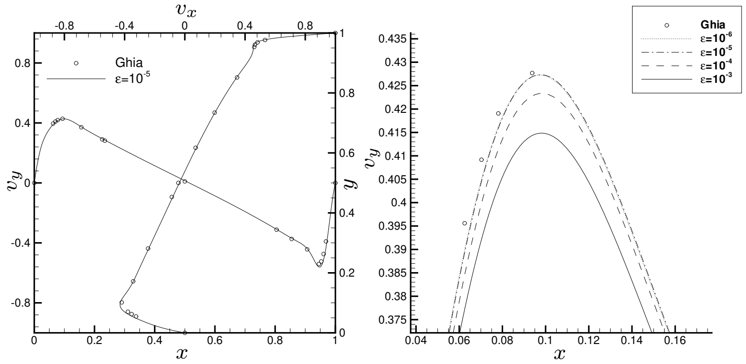
delež zanemarjenih	relativna napaka	α	κ	število zanemarjenih	število ostalih
0.7652	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$	0.05	144395288	44303728
0.9217	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	0.5	173921644	14777372
0.9761	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	4	184189676	4509340
0.9870	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	10	186237435	2461581
0.9997	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	400	188647071	51945



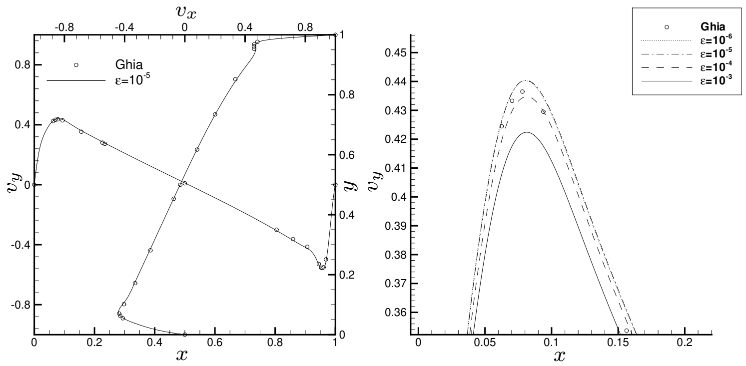
Slika 5.17: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri Re = 100 za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].



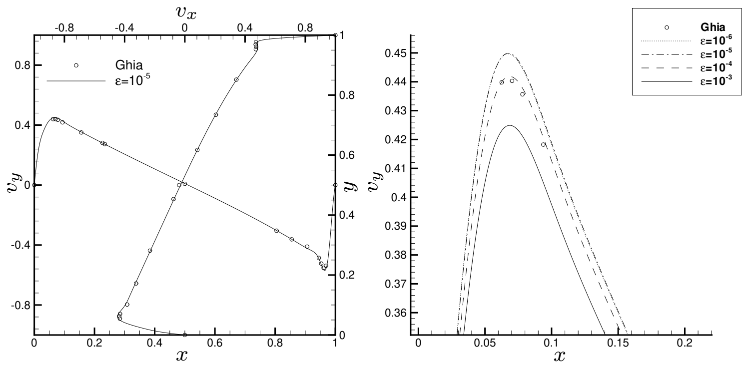
Slika 5.18: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri Re = 1000 za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].



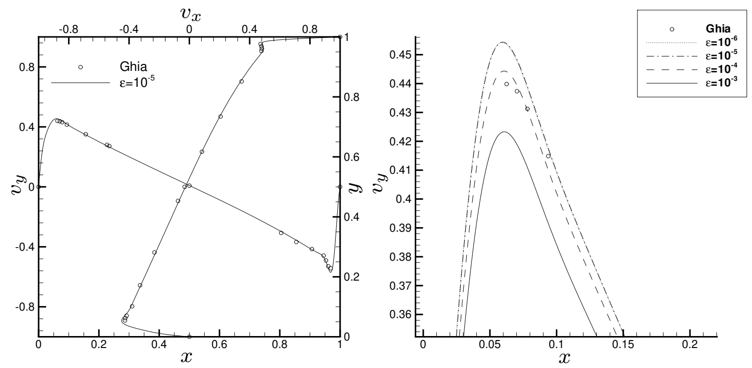
Slika 5.19: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri Re = 3200 za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].



Slika 5.20: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri Re = 5000 za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].



Slika 5.21: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri Re = 7500 za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].



Slika 5.22: Primerjava hitrostnih profilov v gnani kotanji pri $Re = 10000$ *za različne stopnje zanemarjanja s preverjeno rešitvijo Ghie [42].*

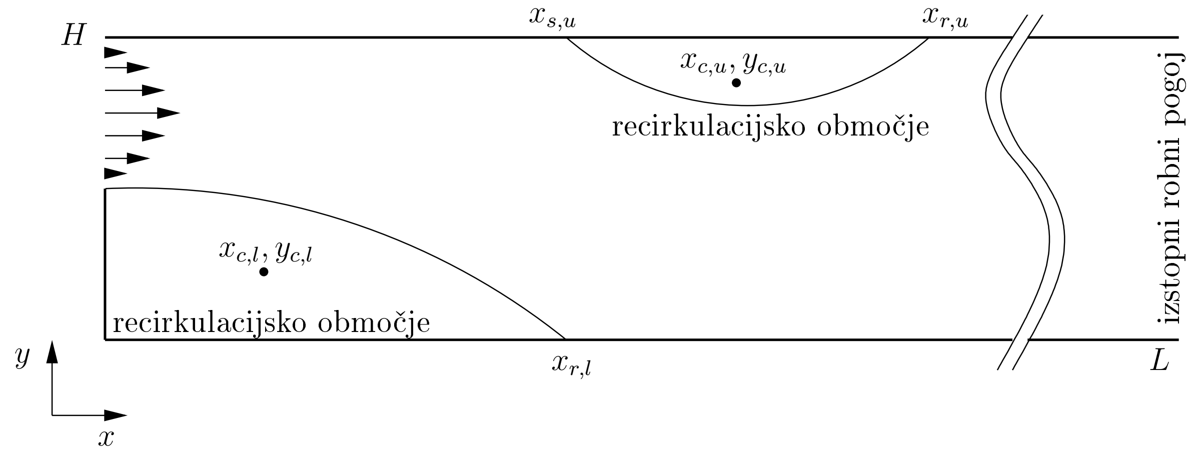
5.11 Tok preko stopnice v kanalu

Tok preko dvodimenzionalne stopnice je eden izmed klasičnih primerov, ki se uporablja za preverjanje natančnosti in stabilnosti numeričnih shem. Že pred dvema desetletjema je Armaly s sodelavci [2] izvedel meritve hitrostnega polja s pomočjo laserske Dopplerjeve metode. Numerično je preverjeno rešitev izdelal Gartling [39]. Kasneje se je primer pri $Re = 800$ uporabljal za validacijo različnih vrst numeričnih algoritmov (Keskar in Lyn [57], Gresho et al. [44]), med drugimi tudi metode robnih elementov (Grigoriev in Dargush [46], Ramšak [93]).

Stopnica je visoka polovico kanala. Za karakteristično dolžinsko skalo smo izbrali višino kanala H. Na vstopu predpišemo paraboličen hitrostni profil. Brezdimenzioniramo ga s hitrostjo $\overline{v}$, ki pri enakomernem profilu ustreza enakemu pretoku. Reynoldsovo število definiramo s celotno višino kanala $Re = \frac{H\overline{v}}{\nu}$. Razmerje med višino in širino kanala smo povzeli po preverjeni rešitvi; $L/H = 30$. Kanal je z robnimi pogoji prikazan na sliki 5.23. Na stenah smo predpisali hitrost enako nič. Primer smo računali stacionarno, zato smo lahko za izstopni robni pogoj uporabili kar vrednosti polj v vozliščih najbližje robu. Kar je predpostavka razvitega profila, odvodi vseh veličin po normali na rob so enaki nič.

Tudi pri tem primeru smo želeli predvsem dokazati, da je vpliv stiskanja matrik integralov z valčno transformacijo zanemarljiv. Iz izkušenj drugih avtorjev je razvidno, da je mreža 500×50 devet-točkovnih elementov s 101101 enakomerno porazdeljenimi vozlišči dovolj dobra za rešitev problema pri $Re = 800$. Na tej mreži smo spreminjali stopnjo zanemarjanja in primerjali rezultate s preverjeno rešitvijo Gartlinga [39] in rešitvami drugih avtorjev. Primerjava je v tabelah 5.16 in 5.17. Opazimo, da se rezultati popolnoma ujemajo s preverjeno rešitvijo do napake zanemarjanja $\epsilon = 10^{-6}$. Pri $\epsilon = 10^{-5}$ je odstopanje od preverjene rešitve še vedno sorazmerno majhno, pri večjih stopnjah zanemarjanja pa hitro zraste.

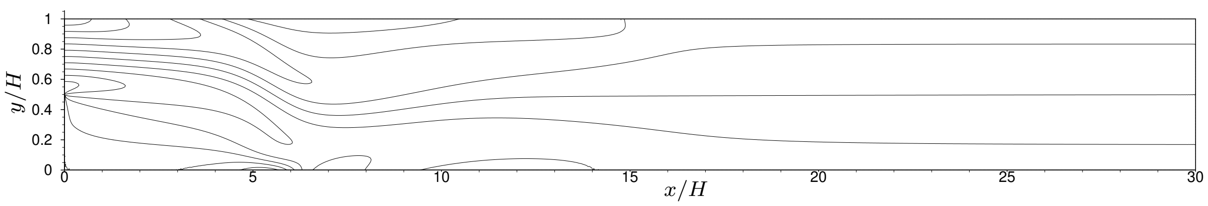
Izolinije vrtinčnosti in tokovne funkcije smo prikazali na slikah 5.24 in 5.25. Vrednosti



Slika 5.23: Skica toka preko stopnice v kanalu. Središče spodnjega vrtinca je označeno z $x_{c,l}, y_{c,l}$, recirkulacijska dolžina na spodnji steni pa $x_{r,l}$. Na zgornji steni pride do separacije toka v točki $x_{s,u}$, recirkulacija pa se zaključi v točki $x_{r,u}$. Sredina zgornjega vrtinca je v točki $x_{c,u}, y_{c,u}$.

prikazanih izolinij so enake kot pri preverjeni rešitvi Gartlinga [39].

Na sliki 5.26 pa prikazujemo hitrostne profile ob različnih stopnjah zanemarjanja. Vidimo, da se profili do $\epsilon = 10^{-5}$ skoraj popolnoma pokrivajo. Pri večjih stopnjah zanemarjanja profili odstopajo predvsem v območju koncev recirkulacij, saj je tam napaka največja. Pri $\epsilon = 10^{-4}$ vidimo, da je spodnji vrtinec prekratek, zgornji pa je pomaknjen proti izhodišču.



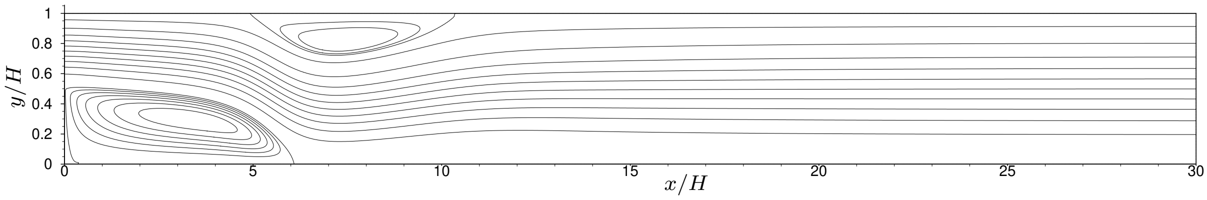
Slika 5.24: Tok preko stopnice, $Ra = 800$, $\epsilon = 10^{-6}$. Izolinije brezdimenzijske vrtinčnosti (-8, -6, -4, 0, 2, 4, 6, 8, 10). Slika je po navpični osi raztegnjena za faktor 4.

Tabela 5.16: Predstavitev rezultatov drugih avtorjev za simulacijo laminarnega toka preko stopnice pri $Re = 800$.

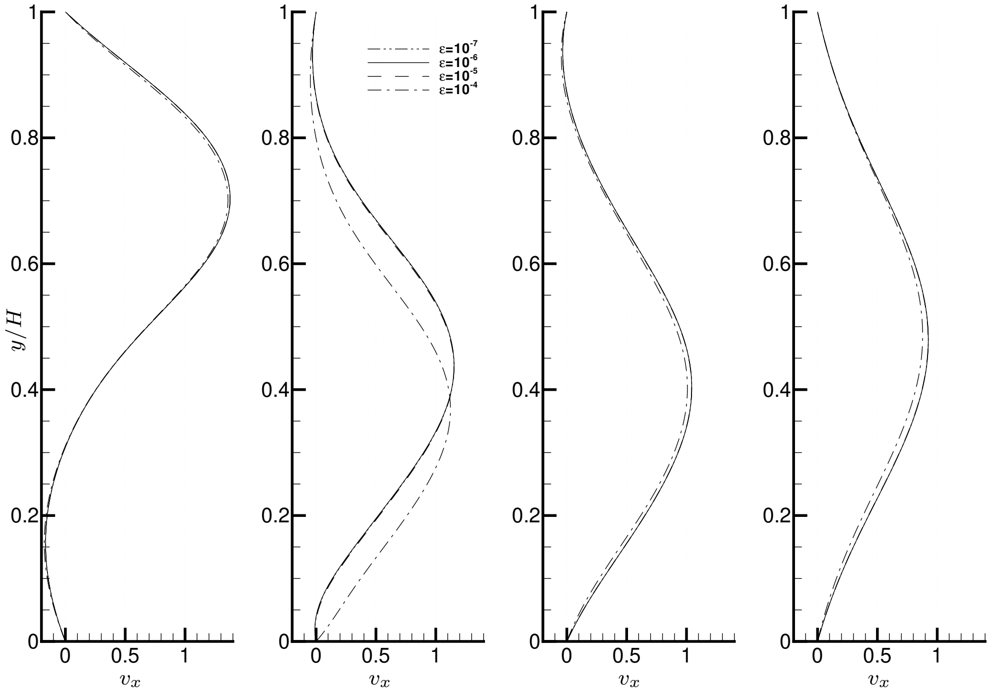
Avtor	Grigoriev [46]	Keskar [57]	Gartling [39]	Gresho [44]	Gresho [44]	Ramšak [93]	Žunič [154]
metoda	BEM	spekt.	FEM	konč. razl.	spekt.	BEM	Bem-Fem
mreža	17.878	3737	E:129.681	1920×128	≈ 8.000	400.000	32.000
$x_{r,l}$	6.10	6.0964	6.10	6.082	6.10	6.10	6.11
$x_{c,l}$		3.392	3.350	3.375			
$y_{c,l}$		0.296	0.3	0.2968			
$\omega(x_{c,l}, y_{c,l})$		-2.2620	-2.283				
$\psi(x_{c,l}, y_{c,l})$		-0.03420	-0.0342	-0.034195	-0.0342		
$x_{r,u}$	10.47	10.4785	10.48	10.4648	10.49	10.48	10.49
$x_{s,u}$	4.85	4.8534	4.85	4.8388	4.86	4.86	4.87
$x_{c,u}$		7.447	7.400	7.4375			
$y_{c,u}$		0.815	0.8	0.8125			
$\omega(x_c, y_c)$		1.1527	1.322				
$\psi(x_c, y_c)$		0.50653	0.5064	0.50661	0.5065		

Tabela 5.17: Predstavitev rezultatov za laminarni tok preko stopnice pri $Re = 800$.

ϵ	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
praznost	0.956	0.879	0.847	0.748	0.536
$x_{r,l}$	5.62	6.045	6.087	6.100	6.096
$x_{c,l}$	3.09	3.33	3.33	3.36	3.36
$y_{c,l}$	0.32	0.3	0.3	0.3	0.3
$\omega(x_{c,l}, y_{c,l})$	-2.420	-2.277	-2.269	-2.29	-2.29
$\psi(x_{c,l}, y_{c,l})$	0.0454	0.03509	0.03439	0.0340	0.0342
$x_{r,u}$	10.58	10.435	10.489	10.478	10.478
$x_{s,u}$	4.57	4.818	4.847	4.855	4.851
$x_{c,u}$	7.02	7.41	7.41	7.47	7.47
$y_{c,u}$	0.77	0.81	0.81	0.82	0.82
$\omega(x_c, y_c)$	1.407	1.187	1.197	1.09	1.10
$\psi(x_c, y_c)$	0.473	0.503727	0.505824	0.506964	0.506607



Slika 5.25: Tok preko stopnice, Ra = 800, $\epsilon = 10^{-6}$. Izolinije tokovne funkcije (-0.03, -0.025, -0.02, -0.015. -0.01, -0.005, 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 , 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.502, 0.504). Slika je po navpični osi raztegnjena za faktor 4.



Slika 5.26: Tok preko stopnice, Ra = 800. Primerjava hitrostnih profilov za različne stopnje zanemarjanja pri $x/H = 3, 6, 9, 12$ (od leve proti desni).

Poglavje 6

Rezultati simulacij

S hitrostno vrtinčnim zapisom simualcije velikih vrtincev smo obdelali dva primera; pojav turbulentne naravne konvekcije v kotanji in turbulentni tok preko od spodaj ogrevane plitve kotanje.

6.1 Naravna konvekcija v kotanji

V zadnjih nekaj desetletjih je več avtorjev raziskovalo različne oblike dvodimenzionalnih vzgonsko gnanih tokov. Poleg problemov tipa Rayleigh-Bénard so predmet raziskav tudi kotanje z greto in hlajeno stranjo ter adiabatnim dnom in stropom. Navadno raziskujejo pravokotne kotanje z različnimi razmerji med širino in višino. Naravna konvekcija v kotanji je prisotna v veliko industrijskih aplikacijah, kot so hlajenje elektronike, izolacija jedrskih reaktorjev, prezračevanje prostorov.

De Vahl Davies in Jones [28] sta predstavila preverjeno rešitev za dvodimenzionalen tok nestisljive viskozne Boussinesqjeve tekočine v kvadratni kotanji. Uporabila sta vrtinčno tokovno formulacijo. Vierendeels et al. [133, 134] so uporabili večmrežno (*multigrid*) metodo za rešitev toka stisljive tekočine v kvadratni kotanji za Rayleighjeva števila med $Ra = 10^2$ in $Ra = 10^7$. Škerget in Samec [125] sta potrdila te rezultate z uporabo 2D metode robnih elementov za stisljivo tekočino. Weisman et al. [138] so raziskovali prehod iz stacionarnega v nestacionarni režim toka za stisljivo tekočino v $1 : 4$ kotanji. Ugotovili so, da do prehoda pride pri $Ra \approx 2 \times 10^5$. Oosthuizen in Paul [81] sta raziskovala vpliv geometrijskega razmerja na nestacionarno obnašanje. Ingber [56] je uporabil vrtinčno formulacijo za rešitev diferencialno grete kvadratne kotanje in pravokotne kotanje z razmerjem stranic $1 : 8$.

Tudi turbulentne simulacije in eksperimenti so bili pogostokrat predmet raziskav. Hsieh in Lien [54] sta numerično modelirala turbulentno naravno konvekcijo v kotanjah z RANS pristopom. 2D DNS kotanje z razmerjem stranic $1 : 4$ sta izvedla Xin in Le Quéré [144]. Simulirala sta tok do na podlagi višine kotanje definiranega Rayleighjevega števila $Ra_h = 10^{10}$. Uporabila sta razvoj po polinomih Čebiševa. To preverjeno rešitev smo uporabili za primerjavo z našimi rezultati.

Zaradi nestabilnosti vertikalnih robnih slojev pride pri razmerju višine proti širini kotanje štiri ali več do nestacionarnega toka, neodvisno od robnih pogojev na horizontalnih stenah. Salat et al. [106] so primerjali rezultate modeliranja turbulentne naravne konvekcije pri visokih Rayleighjevih številih med eksperimentom, 2D LES, 2D DNS in 3D LES numeričnimi simulacijami. Ugotovili so samo majhne razlike med 2D in 3D rezultati in zaključili, da 2D simulacijo lahko uporabimo za prvi približek struktur in oblike toka za Rayleighjevo število okoli 10^{10}. Peng in Davidson [85] sta izvedla LES simulacijo turbulentnega vzgonskega toka v kvadratni kotanji pri $Ra = 1.59 \cdot 10^9$. Uporabila sta tako klasičen Smagorinsky podmrežni model z Van Driest dušenjem od stenah, kot tudi dinamični Smagorinsky model.

6.1.1 Robni pogoji

Z 2D hitrostno vrtinčno simulacijo velikih vrtincev smo simulirali naravno konvekcijo zraka ($Pr = 0.71$) v diferencialno greti kotanji z razmerjem stranic 1 : 4. Numerično rešitev smo dosegli z zgoraj opisano kombinacijo metod robnih in končnih elementov ter valčne transformacije.

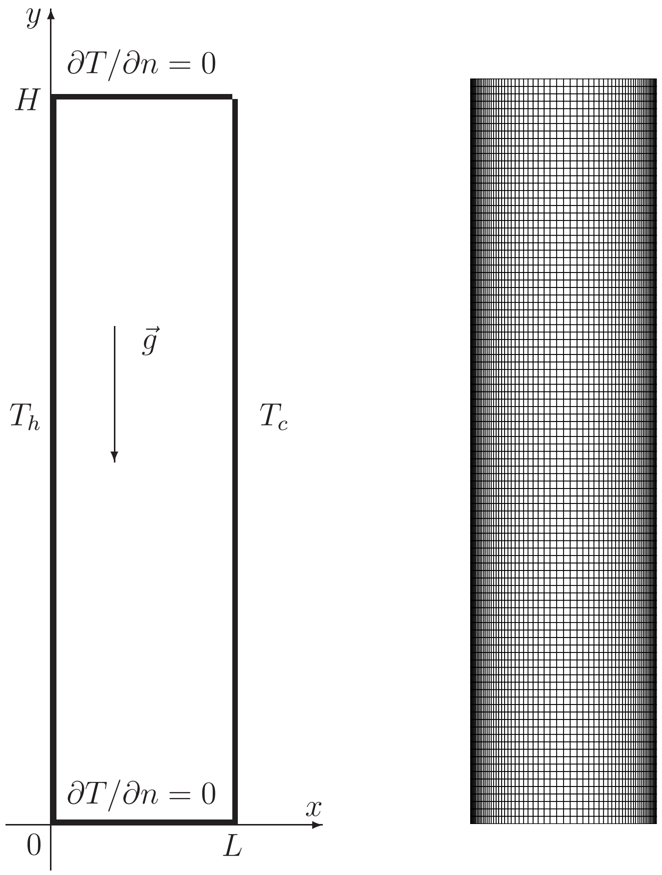
Kotanja je z robnimi in začetnimi pogoji skicirana na sliki 6.1. Na stenah predpišemo hitrost tekočine nič. Levo steno grejemo in držimo na konstantni temperaturi $T_h = 1$, desno pa hladimo in držimo na konstantni temperaturi $T_c = 0$. Dno in strop kotanje sta adiabatna, skoznju ni toplotnega toka. Izračune smo izvajali na dveh mrežah - pri Rayleighjevem številu do 10^9 na mreži s približno 10^5 vozlišči in pri Rayleighjevem številu 10^{10} na mreži s približno $2 \cdot 10^5$ vozlišči. Podrobnosti o mrežah so navedene v tabeli 6.1. Grafični prikaz strukture mreže pa je predstavljen na sliki 6.1.

Tabela 6.1: Podatki o mrežah, ki smo ju uporabili za simulacijo turbulentne naravne konvekcije v kotanji. Razmerje stranic je 1 : 4. Uporabili smo devet točkovne pravokotne Lagrangeeve elemente.

ime mreže	število elementov	število robnih vozlišč	število vseh vozlišč	razmerje med širinami el.	razmerje med višinami el.
128x200r81	25600	1321	103057	8	1
170x300r82	51000	1880	204941	8	2

Simulacijo smo izvedli s petimi različnimi modeli:

- brez podmrežnega modela,
- s podmrežnim modelom brez dušenja,
- s podmrežnim modelom z Van Driestovim dušenjem,
- s podmrežnim modelom s Piomellijevim dušenjem in



Slika 6.1: Robni pogoji za simulacijo naravne konvekcije v pravokotni kotanji z razmerjem stranic $L : H = 1 : 4$. Temperaturi grete in hlajene stene sta $T_h = 1$ in $T_c = 0$. Na desni prikazujemo mrežo 128x200r81, pri čemer je zaradi preglednosti prikazano samo vsako četrto vozlišče.

- z dinamičnim podmrežnim modelom.

Uporabili smo teoretično izračunano LES konstanto $C = 0.1$ (Pope [88]) in eksperimentalno ocenjeno turbulentno Prandtlovo število $Pr_t = 0.6$ (Horvat [51]).

Tok in prenos toplote smo simulirali pri Rayleighjevem številu $Ra = 10^6 - 10^{10}$. Definirali smo ga v enačbi (2.6), pri čemer smo za dolžinsko skalo izbrali širino kotanje. Nekateri avtorji uporabljajo Rayleighjevo število, ki ga definirajo na višino kotanje Ra_h (na primer Xin in Le Quéré [144] ter Salat et al. [106]). Razmerje med števili po obeh definicijah je

$$\frac{Ra}{Ra_h} = 4^3 = 64. \tag{6.1}$$

Za lažjo fizikalno predstavo pojava si zamislimo zelo dolgo kotanjo, širine $50cm$ in višine $2m$. Za zrak v njej predpostavimo, da ima $\nu = 15.6 \cdot 10^{-6} m^2/s$, $\beta_T = 1/300 K^{-1}$ in $\lambda = 0.0261976 W/mK$. Za te pogoje v tabeli 6.2 navajamo odvisnost temperaturne razlike in toplotnega toka od Rayleighjevega števila. Navajamo tudi brezdimenzijski časovni korak, pri katerem smo simulacijo računali skupaj z vrednostjo z dimenzijami za izbrani primer.

Tabela 6.2: Povezava med Rayleighjevim številom in razliko temperatur med stenama za primer pol metra široke kotanje. Prikazujemo tudi brezdimenzijske čase pri katerih smo izvajali simulacije in za izbrani primer preračunane fizikalne čase.

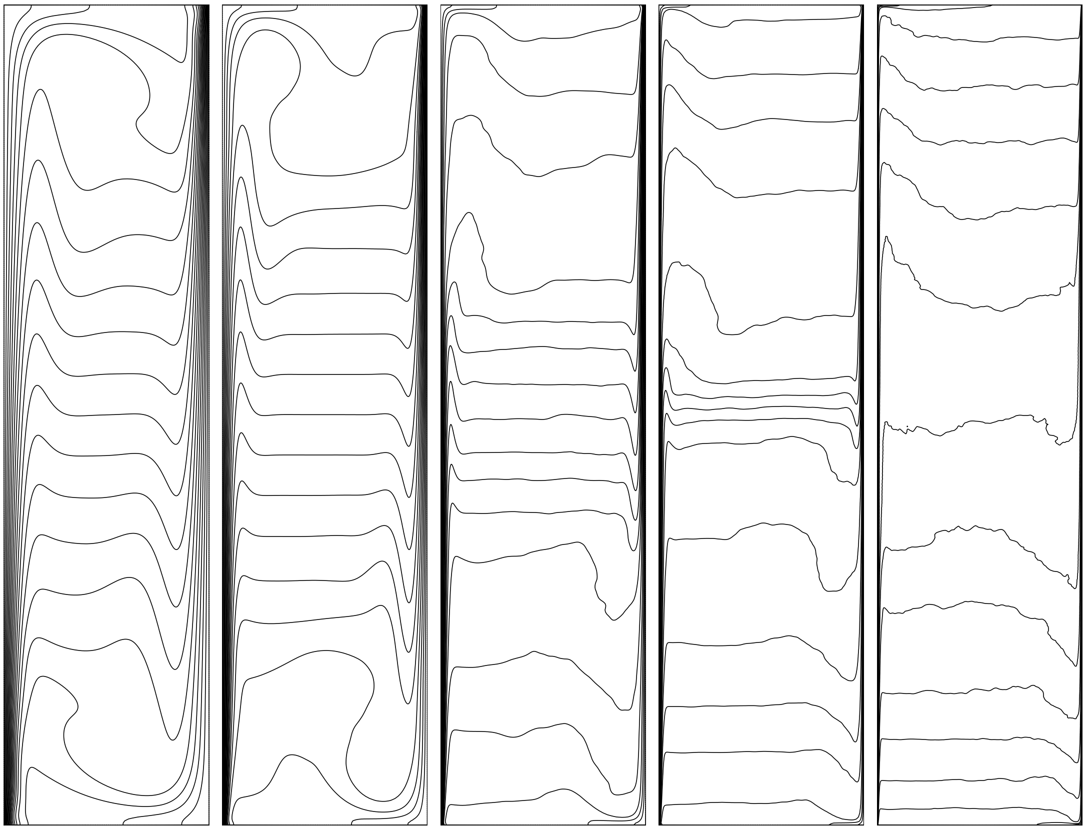
Ra	$\Delta T[K]$	$q_0 = \frac{\lambda \Delta T}{h} \left[\frac{W}{m^2}\right]$	Δt	$\Delta t \cdot t_0[s]$
10^6	0.09	0.0047	10^{-5}	$1.1 \cdot 10^{-1}$
10^7	0.9	0.047	10^{-5}	$1.1 \cdot 10^{-1}$
10^8	9	0.47	10^{-6}	$1.1 \cdot 10^{-2}$
10^9	90	4.7	10^{-6}	$1.1 \cdot 10^{-2}$
10^{10}	900	47	10^{-7}	$1.1 \cdot 10^{-3}$

Za simulacijo naravne konvekcije pri Rayleighjevem številu $Ra = 10^6$ nismo uporabili podmrežnega modela. Tok je laminaren in stacionaren. Na obeh mrežah in tudi pri zelo kratkem časovnem koraku smo dosegli stacionarno stanje. Najmanjši časovni korak, ki smo ga uporabili je bil $\Delta t = 10^{-6}$. Za začetno stanje tekočine pri simulacijah pri višjih Rayleighjevih številih smo uporabili tokovna polja pri nižjih Ra številih.

Pri Rayleighjevem številu $Ra = 10^7$ smo uporabili brezdimenzijski časovni korak $\Delta t = 10^{-5}$, pri $Ra = 10^8$ in $Ra = 10^9$ smo uporabili $\Delta t = 10^{-6}$, pri $Ra = 10^{10}$ pa $\Delta t = 10^{-7}$. Prehodni pojav je pri $Ra = 10^7$ trajal 1000 časovnih korakov, pri $Ra = 10^8$ in $Ra = 10^9$ 4000 časovnih korakov, pri $Ra = 10^{10}$ pa 1000 časovnih korakov. V analizah nismo uporabili rezultatov med prehodnim pojavom.

6.1.2 Dinamika toka

Na sliki 6.2 prikazujemo stacionarno temperaturno polje pri $Ra = 10^6$, povprečno temperaturno polje brez podmrežnega modela za $Ra = 10^7$ in povprečni temperaturni polji s podmrežnim modelom s Piomelli dušenjem za $Ra = 10^8$ in $Ra = 10^9$ in povprečno temperaturno polje s podmrežnim modelom z Van Driestovim dušenjem za $Ra = 10^{10}$. Medtem ko pri $Ra = 10^6$ tok doseže stacionarno stanje, pri $Ra = 10^7$ mejna plast postane nestabilna. V zgornjem delu tople stene in v spodnjem delu mrzle stene se pojavijo vrtinci. Konvektivni tok jih prenaša v smeri toka vzdolž obeh sten, navzgor ob topli steni in navzdol ob mrzli steni. Ob prihodu na vrh, oziroma na dno kotanje, vrtinci ta dva dela kotanje premešata. V srednjem delu kotanje je tok skorajda stacionaren, temperaturno polje je stratificirano. Vrtinci se pojavljajo periodično, tokovno polje je zato oscilirajoče in skorajda simetrično.

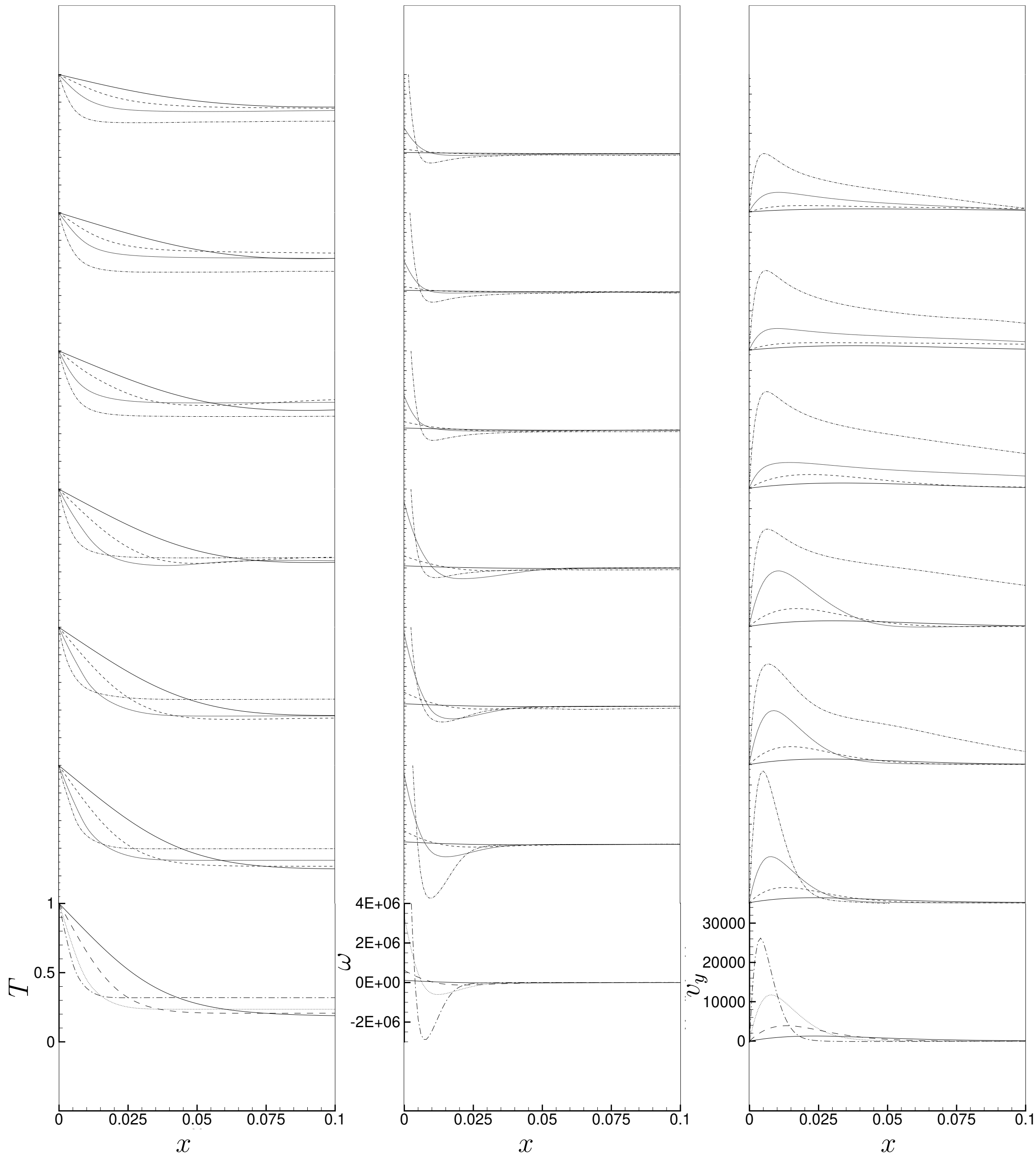


Slika 6.2: Temperaturna polja (1(0.05)0): z leve proti desni: stacionarno stanje pri $Ra = 10^6$, časovno povprečno polje $Ra = 10^7$ brez podmrežnega modela, časovno povprečno LES polje $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ in $Ra = 10^{10}$.

Pri $Ra = 10^8$ nastajajo vrtinci bolj pogosto. Mejna plast je nestabilna na zgornji polovici tople stene in na spodnji polovici mrzle stene. Stratificiran osrednji del se zmanjša. Tok ni niti približno več simetričen, čeprav je začetno temperaturno in hitrostno polje bilo simetrično. Dolžinska skala struktur v toku se zmanjšuje.

Pri $Ra = 10^9$ in $Ra = 10^{10}$ nastajajo vrtinci še pogosteje skorajda po celotni dolžini obeh sten. Večina vrtincev nastaja približno na polovici višine kotanje. Zato je tudi osrednji del kotanje popolnoma premešan, o stratifikaciji ne moremo več govoriti. V tokovnem polju so prisotni vrtinci zelo različnih velikostnih in časovnih skal. Polje se ne ponavlja, je nepravilno in kaotično.

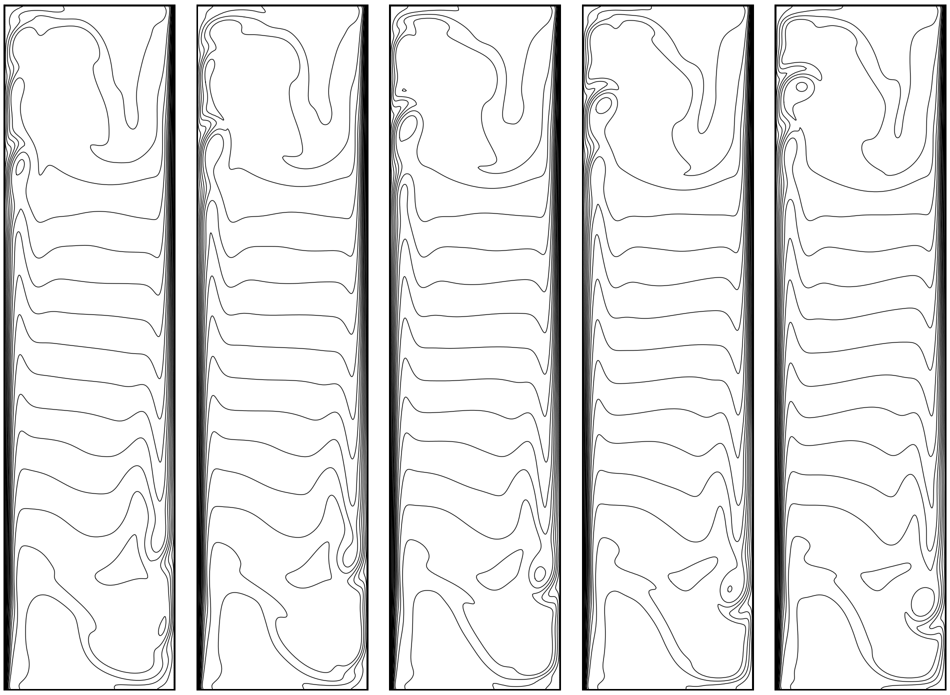
Na podlagi povprečnih tokovnih polj smo izrisali profile temperature, hitrosti in vrtinčnosti na različnih višinah v kotanji (slika 6.3). Profili jasno prikazujejo tanjšanje mejne plasti s povečevanjem Rayleighjevega števila. Profili prikazujejo področje ob topli steni, zato je mejna plast na profilih, ki prikazujejo spodnji del kotanje najtanjša, saj tu ne prihaja do nastajanja vrtincev. Pri $Ra = 10^9$ in $Ra = 10^{10}$ vrtinčnost zelo naraste, kar nakazuje na prisotnost majhnih struktur v toku. Ob topli steni je vertikalna hitrost



Slika 6.3: Profili temperature, vrtinčnosti in vertikalne hitrosti na višinah $y = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$ *za* 10% *kotanje ob topli steni. Profili za* $Ra = 10^7$ *so prikazani s polno črto,* $Ra = 10^8$ *s črtkano,* $Ra = 10^9$ *s pikčasto črto in* $Ra = 10^{10}$ *s črto-piko.*

največja na spodnjem delu kotanje. Višje v kotanji nastajajo v toku vrtinci, ki zmanjšajo vertikalno hitrost.

Prikaz izolinij temperature za različne časovne korake je za $Ra = 10^7$ prikazan na sliki 6.4. Na seriji petih zaporednih slik lahko opazimo rojstvo vrtinca in njegovo pot v tokovnem polju. Med slikami je po 250 časovnih korakov. Na sliki 6.5 so prikazana temperaturna polja v časovnem razmiku 150 korakov za $Ra = 10^8$, na sliki 6.6 pa temperaturna polja za $Ra = 10^9$ s časovnimi zamiki 100 korakov. Prikazujemo rezultate s Piomellijevim dušenjem. Na sliki 6.7 pa so temperaturna polja pri $Ra = 10^{10}$.

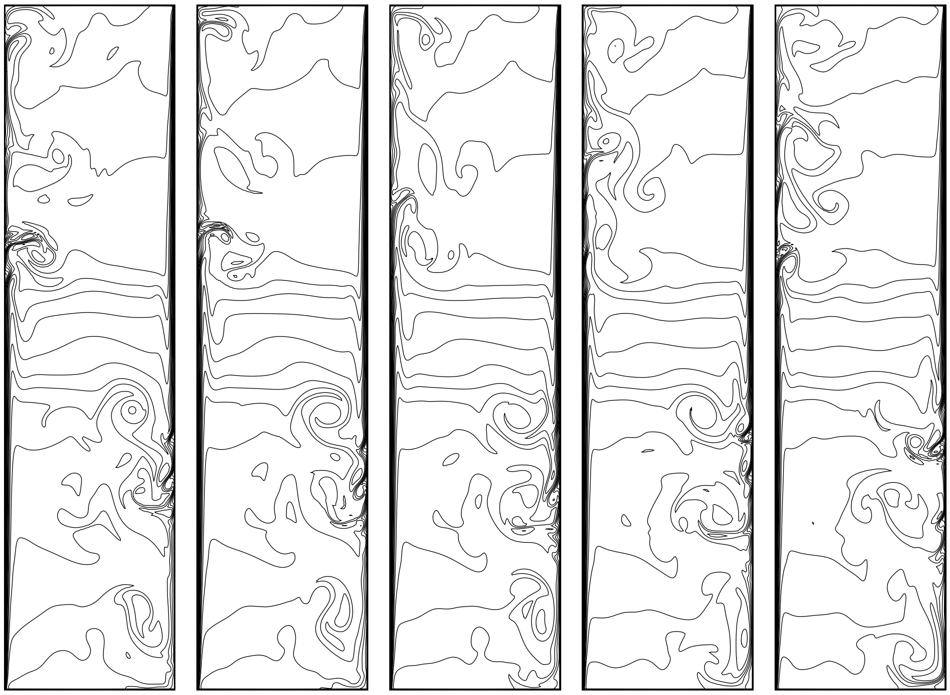


Slika 6.4: Temperaturna polja pri $Ra = 10^7$ za pet časovnih korakov. Med slikami je 250 brezdimenzijskih časovnih korakov.

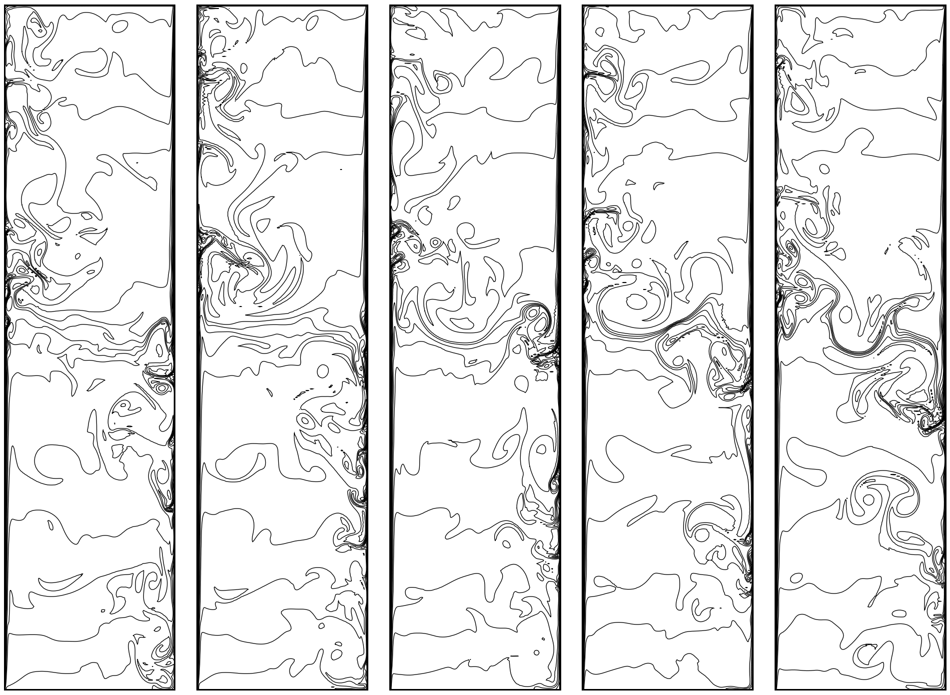
V osrednjem delu kotanje pri nižjih Rayleighjevih številih opazimo temperaturno slojevitost oziroma stratifikacijo. Brezdimenzijski parameter stratifikacije je definiran s

$$S_p = \frac{\partial T}{\partial y}|_{x=L/2,y=H/2}. \quad (6.2)$$

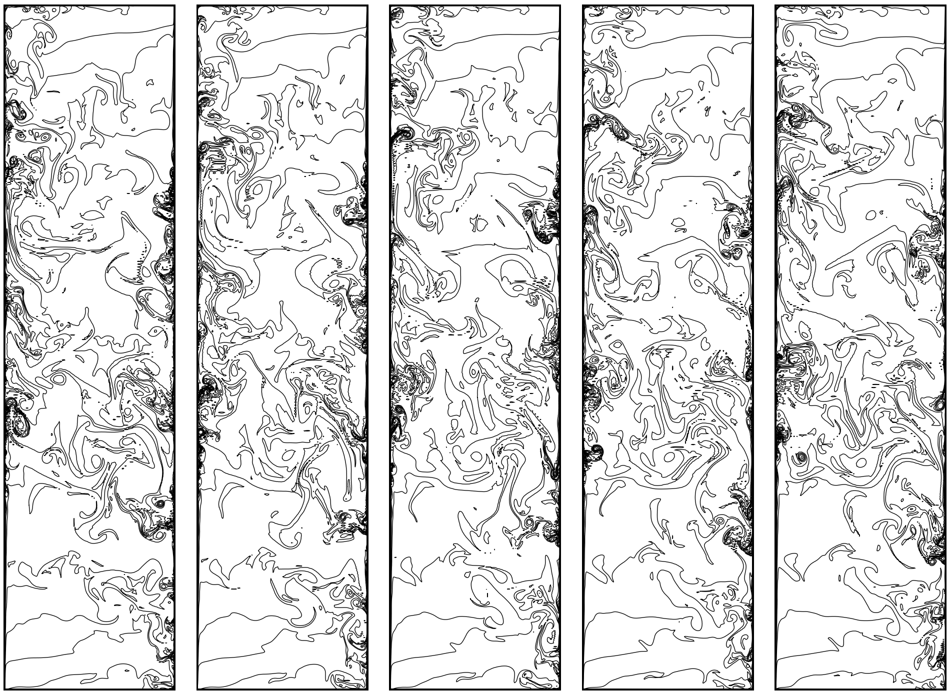
S povprečnimi temperaturnimi polji smo parameter stratifikacije izračunali. Pri $Ra = 10^7$ smo dobili $S_p = 0.25$, pri $Ra = 10^8$ $S_p = 0.30$, pri $Ra = 10^9$ $S_p = 0.77$ in pri $Ra = 10^{10}$ $S_p = 0.1$. Tian in Karayiannis [130] poročata $S_p = 0.5$ za $Ra = 1.58 \cdot 10^9$ v kvadratni kotanji. Xin in Le Quéré [144] pa $S_p \approx 1$ za $Ra_h = 10^9 - 10^{10}$.



Slika 6.5: Temperaturna polja pri Ra $= 10^8$ *za pet časovnih korakov. Med slikami je 150 brezdimenzijskih časovnih korakov.*



Slika 6.6: Temperaturna polja pri Ra $= 10^9$ *za pet časovnih korakov. Med slikami je 100 brezdimenzijskih časovnih korakov.*



Slika 6.7: Temperaturna polja pri $Ra = 10^{10}$ za pet časovnih korakov. Med slikami je 100 brezdimenzijskih časovnih korakov.

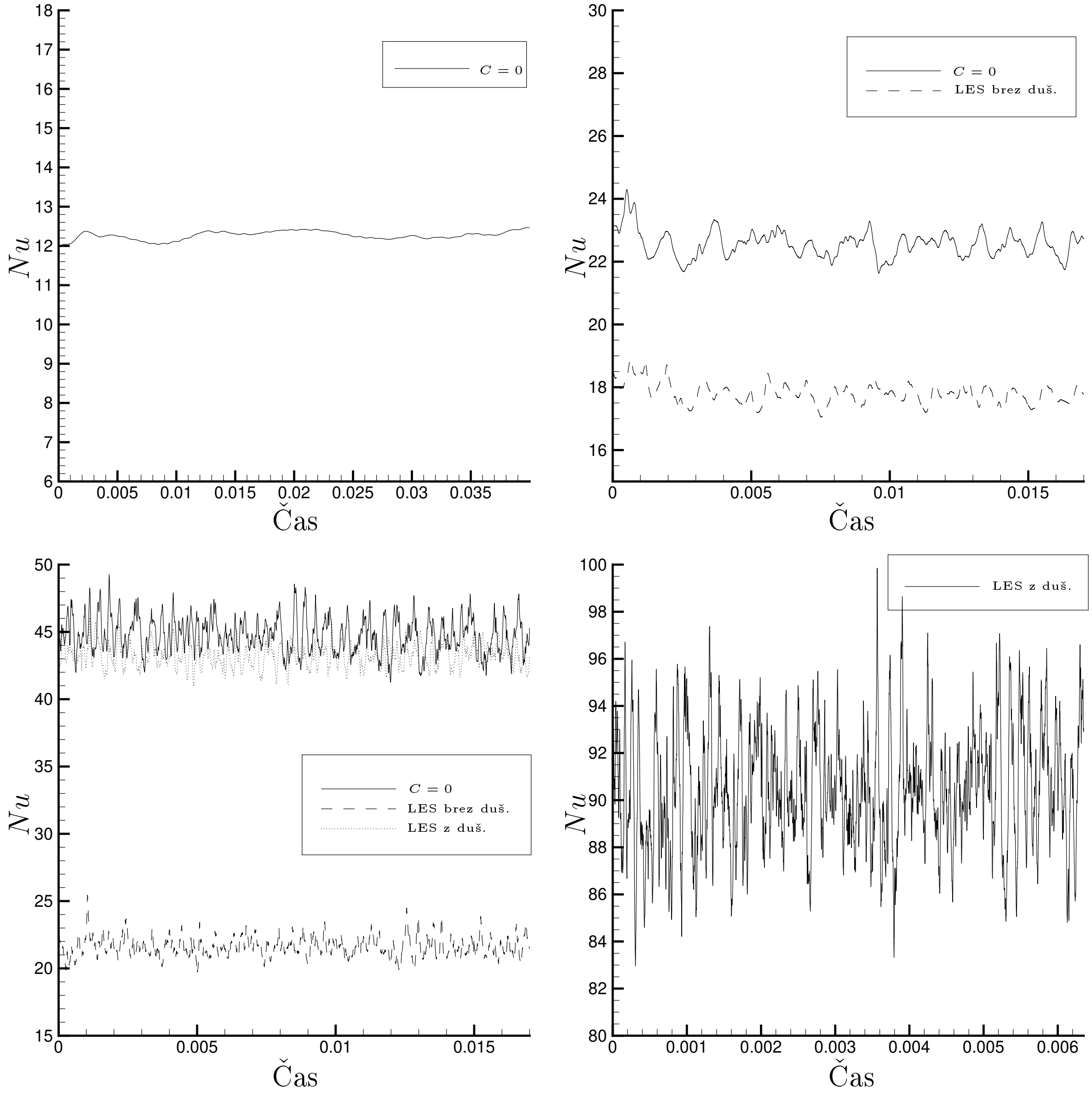
6.1.3 Prenos toplote

Prenos toplote skozi trdno steno predstavlja povprečno Nusseltovo število, ki ga za našo geometrijo definiramo z

$$Nu = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial T}{\partial x} dy. \tag{6.3}$$

Na sliki 6.8 prikazujemo grafe odvisnosti Nusseltovega števila od časa. Časovno povprečne vrednosti v tabeli 6.3 primerjamo s preverjeno rešitvijo Xin and Le Quéré [144]. Z eksperimenti je bilo ugotovljeno (Faber, [33]), da je razmerje $Nu/Ra^{1/4}$ konstantno za laminarno mejno plast in $Nu/Ra^{1/3}$ približno konstantno za turbulentno mejno plast. Z interpolacijo smo jih izračunali in jih prav tako na tabeli 6.3 primerjamo z referenčno rešitvijo. Ugotovili smo, da se časovno povprečne vrednosti zelo dobro ujemajo s preverjeno rešitvijo. Pri $Ra = 10^7$ je tok še laminaren in model brez podmrežne viskoznosti poda pravilne rezultate. Mreža pri tem Rayleighjevem številu uspe popisati vso fiziko, zato podmrežno model ni potreben.

Pri $Ra = 10^8$ smo primerjali rezultate z in brez podmrežnega modela in ugotovili, da so identični. Pri $Ra \geq 10^9$ pa LES izračun z dušenim podmrežnim modelom poda boljše rezultate. Pri $Ra = 10^9$ smo primerjali rezultate LES simulacije brez dušenja in s Piomellijevim oziroma Van Driestovim dušenjem. Izračun brez dušenja podmrežne viskoznosti ob stenah napove popolnoma napačno tokovno sliko in prenos toplote. To je



Slika 6.8: Odvisnost Nusseltovega števila od časa za: $Ra = 10^7$ (zgoraj levo), $Ra = 10^8$ (zgoraj desno), $Ra = 10^9$ (spodaj levo) in $Ra = 10^{10}$ (spodaj desno).

Tabela 6.3: Časovno povprečno Nusseltovo število Nu in primerjava korelacij s preverjeno DNS rešitvijo Xin et al. [144]. Primerjamo rezultate brez podmrežnega modela $C = 0$ in rezultate LES s Piomelli (LES_p) in Van Driest (LES_{vd}) dušenjem. (*) Za Nu pri $Ra = 10^8$ in $Ra = 10^9$ smo rezultate Xin-a napovedali s pomočjo njegove odvisnosti $Nu/Ra^{1/4}$. (+) Z našo $Nu/Ra^{1/4}$ odvisnostjo smo napovedali Nu za $Ra = 3.125 \cdot 10^7$ in $Ra = 1.56 \cdot 10^8$.

	Nu				$Nu/Ra^{1/4}$		$Nu/Ra^{1/3}$	
Ra	$C = 0$	LES_p	LES_{vd}	Xin [144]	naši	Xin [144]	naši	Xin [144]
10^7	12.27			12.3	0.2181	0.2185	0.0569	0.0571
$3.125 \cdot 10^7$		16.91^+		16.62		0.2227		0.0528
10^8	22.5	22.5		22.56*	0.2256		0.0486	
$1.56 \cdot 10^8$		25.57^+		25.25		0.2256		0.0469
10^9	44.77	43.25	43.67	43.63*	0.2432		0.0433	
10^{10}			90.44		0.2856		0.0419	

v skladu s trditvami drugih avtorjev (Breuer, [11]). Ob stenah je podmrežno viskoznost potrebno dušiti. Primerjava simulacij s Piomellijevim in Van Driestovim dušenjem pa je pokazala, da Van Driestovo dušenje poda malenkost boljše rezultate. Izračun z dinamično določitvijo konstante modela je velikokrat napovedal negativno konstanto. Ker smo jo umetno postavljali na nič, je bil rezultat simulacij podoben izračunu pri $C = 0$.

Izračunano razmerje $Nu/Ra^{1/4}$ je približno konstantno za $Ra = 10^7 - 10^8$, kar nakazuje na laminarno mejno plast. Pri $Ra = 10^9 - 10^{10}$ pa je konstantno razmerje $Nu/Ra^{1/3}$, kar dokazuje turbulentno mejno plast.

Pri manjših Rayleighjevih številih, kjer vrtinci ne nastajajo vzdolž celotnih višin obeh sten, je prenos toplote največji tam, kjer vrtincev ni. Tam je temperaturna mejna plast zelo tanka in zato je prenos toplote velik.

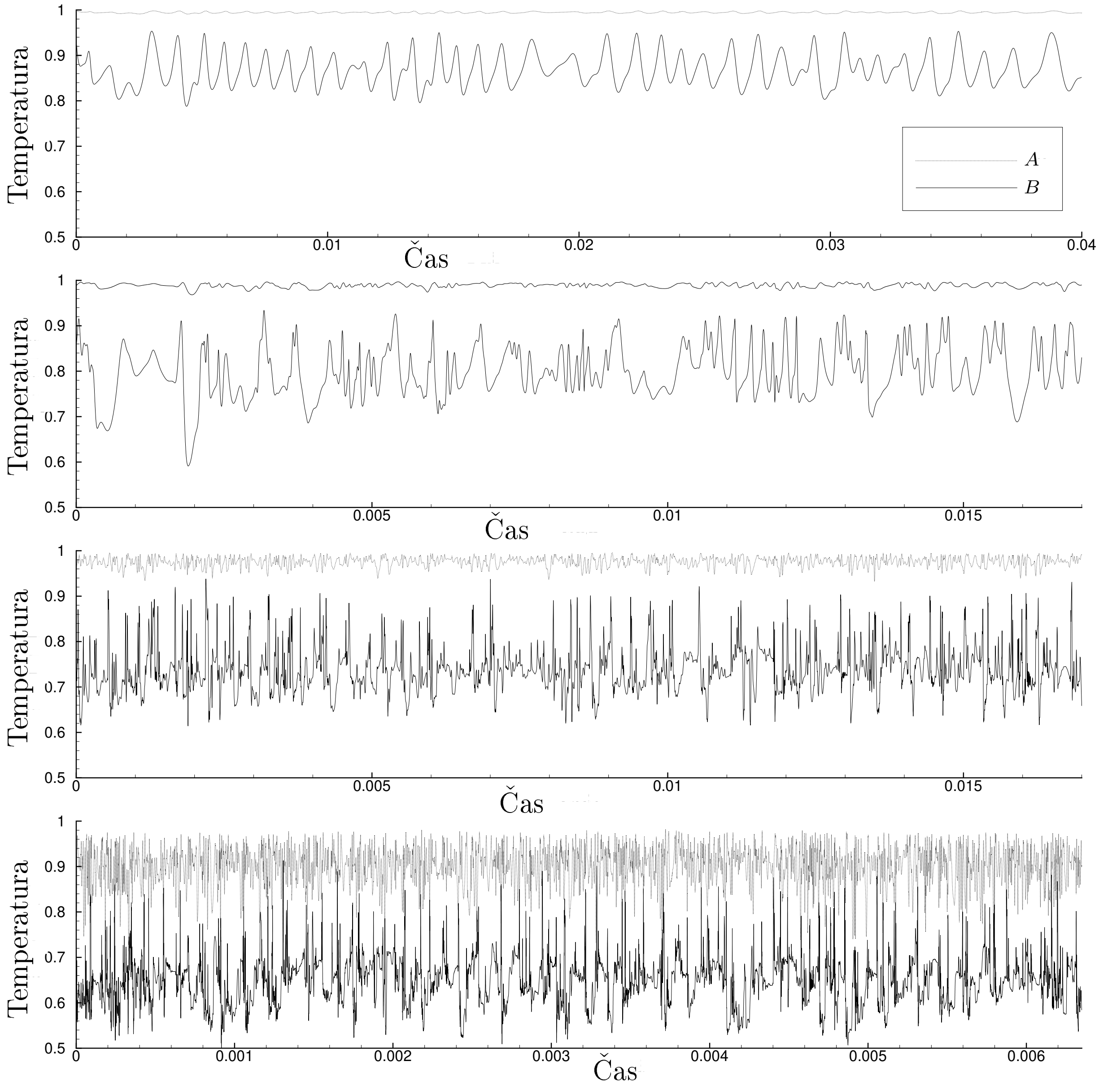
6.1.4 Analiza prehoda od oscilirajočega do turbulentnega režima toka

Prehod iz stacionarnega režima toka pri $Ra = 10^6$ preko oscilirajočega režima pri $Ra = 10^7$ do turbulentnega pri $Ra = 10^{10}$ smo prikazali na grafih odvisnosti temperature od časa v dveh točkah. Točki smo izbrali tik ob topli steni v zgornji polovici kotanje. Torej točno tam, kjer vrtnici nastajajo najprej. Koordinati točk sta

$$A = (0.0011, 3.5), \qquad B = (0.0301, 3.5). \tag{6.4}$$

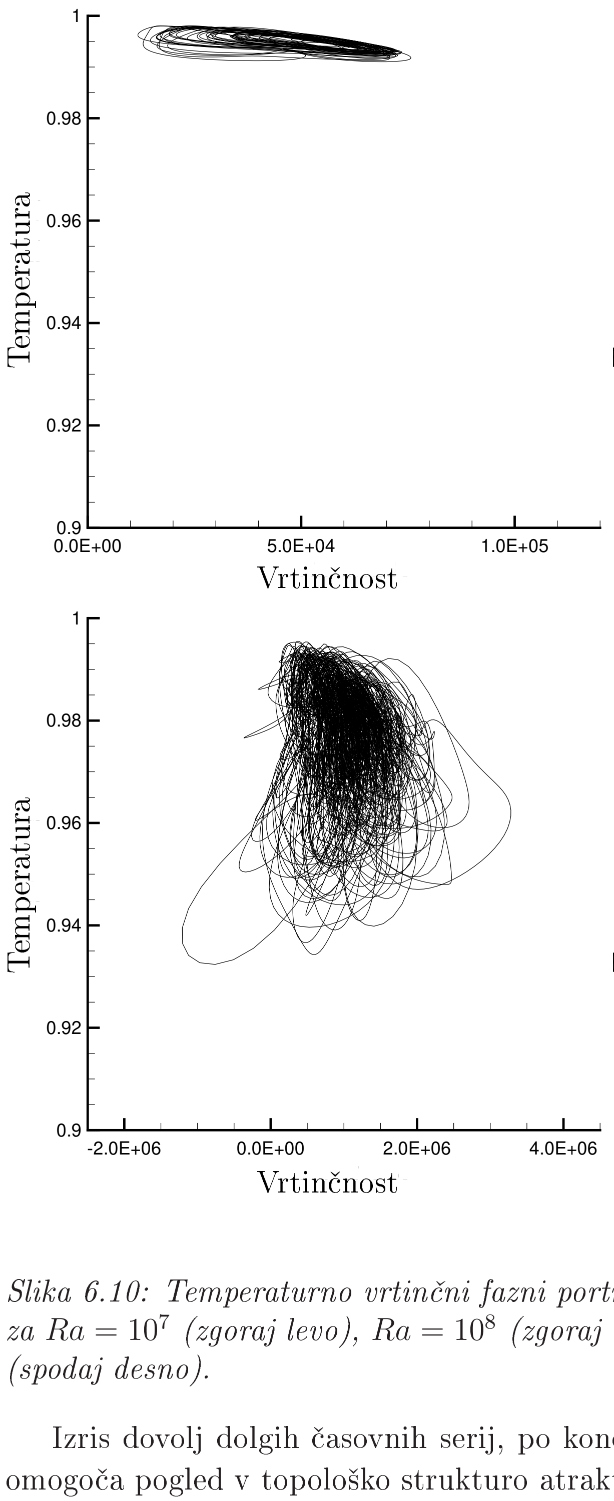
Grafi so na sliki 6.9, kjer že na prvi pogled vidimo oscilirajoč potek spreminjanja temperature s časom pri $Ra = 10^7$, medtem ko pri višjih Rayleighjevih številih prihaja do izraza bolj ne-ponovljiv, kaotičen in nepravilen značaj turbulentnega toka.

Prehod iz oscilirajoče v turbulentne tokovne razmere lahko opazujemo tudi na temperaturno - vrtinčnih faznih portretih. Izrisali smo jih s pomočjo časovnih serij temperature



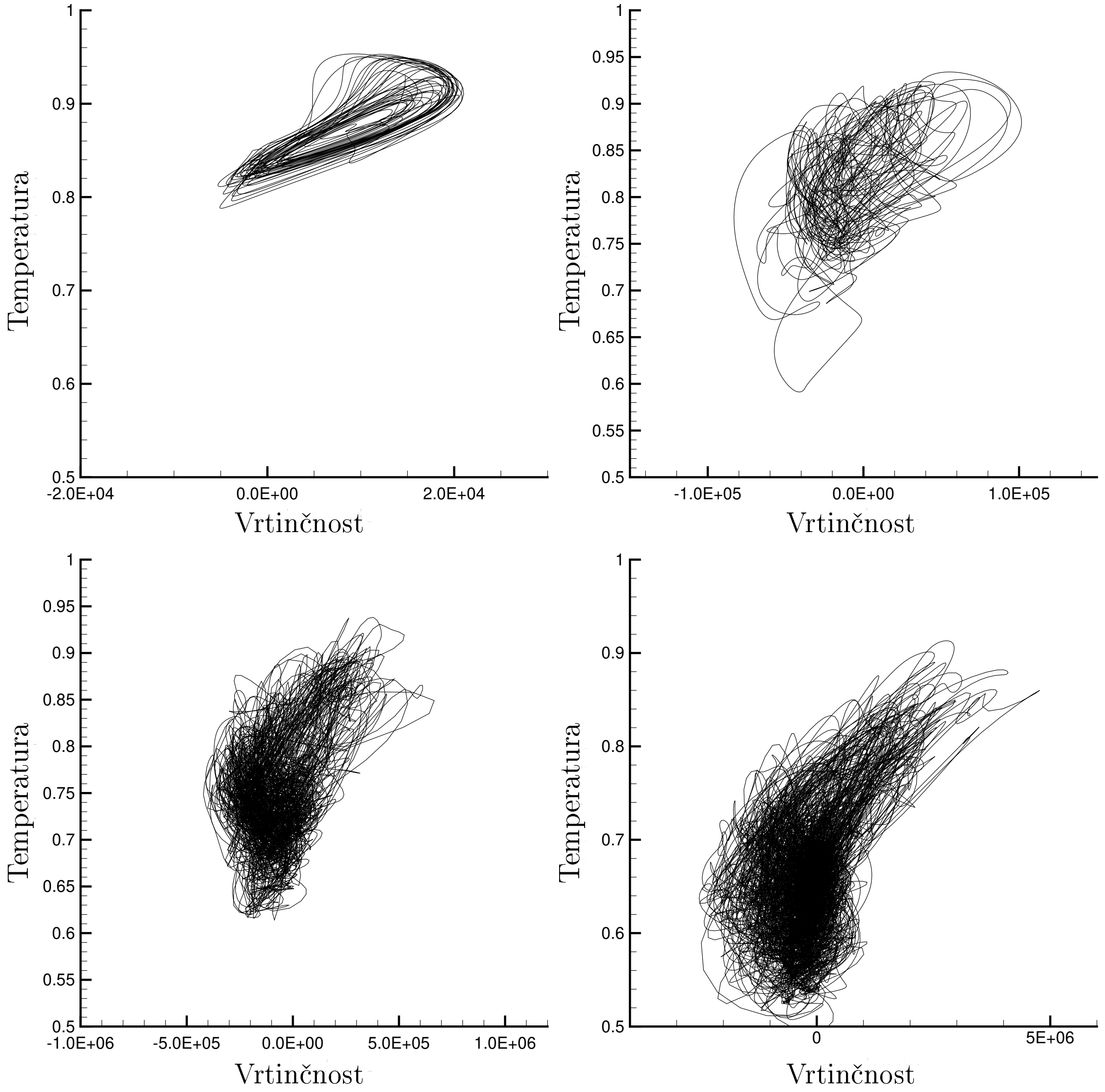
Slika 6.9: Odvisnost temperature od časa v točkah A=(0.0011,3.5) in B=(0.0301,3.5). Od zgoraj navzdol: $Ra = 10^7$, $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ *in* $Ra = 10^{10}$.

in vrtinčnosti v točkah (6.4). Prikazani so na slikah 6.10 in 6.11.



Slika 6.10: Temperaturno vrtinčni fazni portreti za časovne serije v točki A=(0.0011,3.5) za $Ra = 10^7$ (zgoraj levo), $Ra = 10^8$ (zgoraj desno), $Ra = 10^9$ (spodaj levo) in $Ra = 10^{10}$ (spodaj desno).

Izris dovolj dolgih časovnih serij, po koncu prehodnega pojava, na faznem diagramu omogoča pogled v topološko strukturo atraktorja, v katero se trajektorija razvije po dolgem času (Decker [29]). Za $Ra = 10^6$ faznega diagrama nismo narisali, saj bi bil, zaradi stacionarnega stanja, samo ena točka v diagramu. Fazni portret pri $Ra = 10^7$ zajema majhno eliptično oblikovano območje. Temperatura in vrtinčnost sta močno korelirani.



Slika 6.11: Temperaturno vrtinčni fazni portreti za časovne serije v točki B=(0.03,3.5) za $Ra = 10^7$ *(zgoraj levo),* $Ra = 10^8$ *(zgoraj desno),* $Ra = 10^9$ *(spodaj levo) in* $Ra = 10^{10}$ *(spodaj desno).*

Obnašanje tekočine je oscilatorno, kaotičnega obnašanja ne opazimo. Fazni portret pri $Ra = 10^8$ zajema očitno večje $T - \omega$ območje in nima pravilne oblike. Čeprav korelacija med temperaturo in vrtinčnostjo še vedno obstaja, tok postaja vedno bolj nepravilen in kaotičen. Fazna portreta pri $Ra = 10^9$ in $Ra = 10^{10}$ zajemata še večji območji. Obliki sta nepravilni, v toku je mogoče zaslediti zelo različne kombinacije temperature in vrtinčnosti.

Še en dokaz prehoda iz oscilatornega v turbulentni režim toka lahko ponudimo s pomočjo izračuna spektrov. S hitro Fourierjevo transformacijo (Press et al. [89]) smo izračunali spektre iz časovnih serij temperature v točkah A in B. Spektralno amplitudo prikazujemo na sliki 6.12.

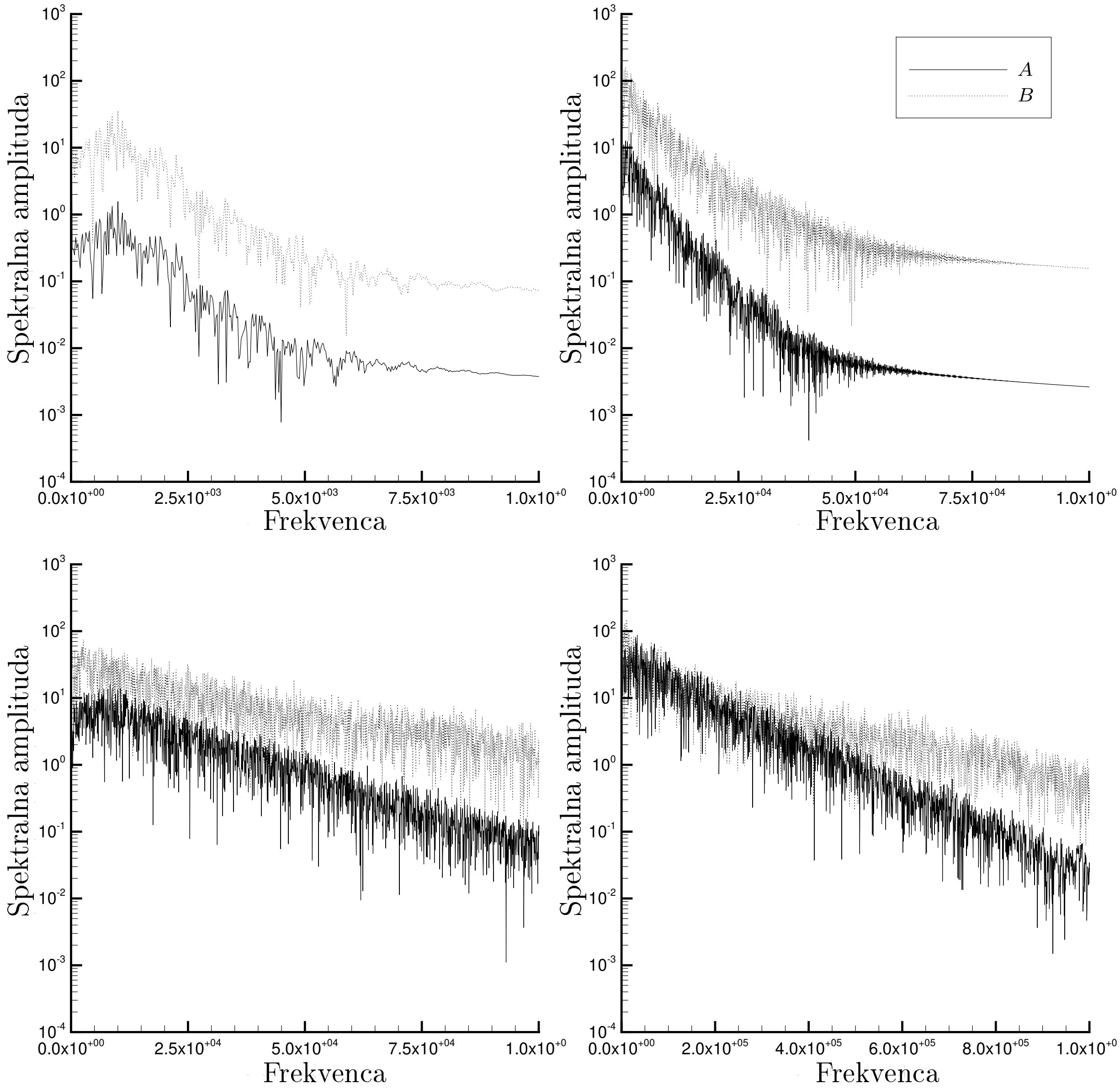
Na slikah smo uspeli analizirati frekvence oscilacij in razvoj široko pasovnega dela spektra, ki nakazuje na dinamiko turbulentnih tokov. Dominantna oscilatorna frekvenca, s katero nastajajo vrtinci pri $Ra = 10^7$, je jasno izražena na spektru. Če primerjamo spektre od $Ra = 10^7$ do $Ra = 10^{10}$, opazimo velik porast energije pri visokih frekvencah z večanjem Rayleighjevega števila. To nakazuje na obstoj majhnih struktur, ki so odgovorne za hitre spremembe temperature in s tem spekter postane širokopasoven.

6.1.5 Turbulentne statistike

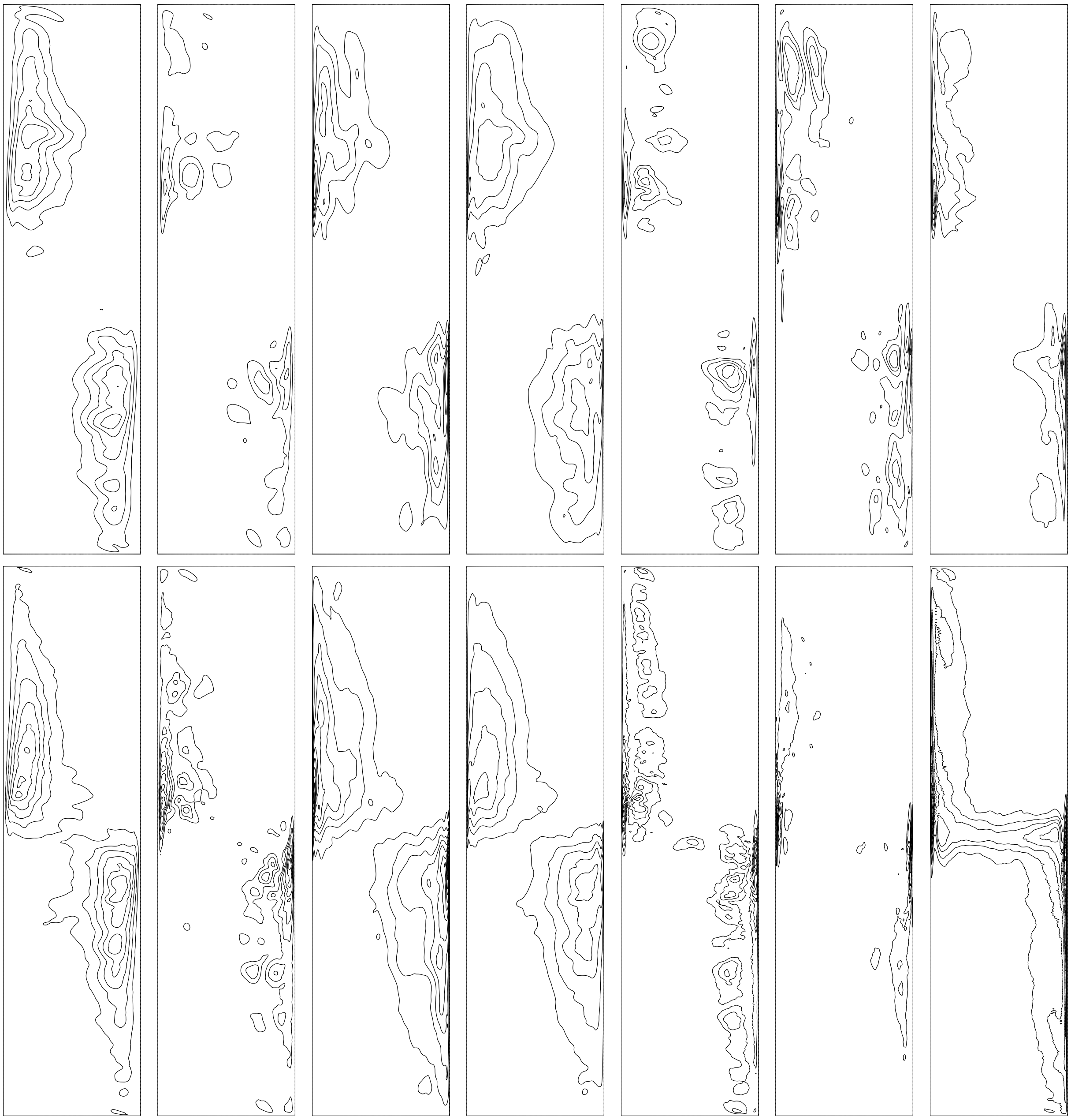
Za višja Rayleighjeva števila smo izračunali turbulentne statistike drugega reda. Ker so naše simulacije dvo-dimenzionalne in turbulentni tok ni popolnoma razvit, predstavljamo rezultate v tem razdelku zgolj z namenom kvalitativne analize. Na slikah 6.13 in 6.14 prikazujemo Reynoldsove napetosti $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_x v'_y}$, $\overline{v'_y v'_y}$, turbulentno kinetično energijo $k = \frac{1}{2}\overline{v'_i v'_i}$, turbulentne toplotne tokove $\overline{v'_x T'}$, $\overline{v'_y T'}$ in varianco temperature $\overline{T'T'}$ za $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ in $Ra = 10^{10}$. Pri najmanjšem Rayleighjevem številu opazimo, da je območje turbulentno predvsem na zgornjem delu tople stene in spodnjem delu mrzle stene, medtem ko osrednji del kotanje ostaja laminaren. To je skladno z DNS rezultati Xin et al. [144]. Pri $Ra = 10^9$ najdemo maksimum turbulentnih fluktuacij ob robu na sredini kotanje. Tam nastane večina vrtincev. Tok jih prenaša dolvodno in proti središču kotanje. Z naraščajočim Rayleighjevim številom se maksimum turbulentne kinetične energije pomika gorvodno in je daleč stran od vertikalne mejne plasti. Nasprotno, maksimalni turbulentni toplotni tok in maksimum temperaturne variance se nahajata v mejni plasti.

6.1.6 Zaključki

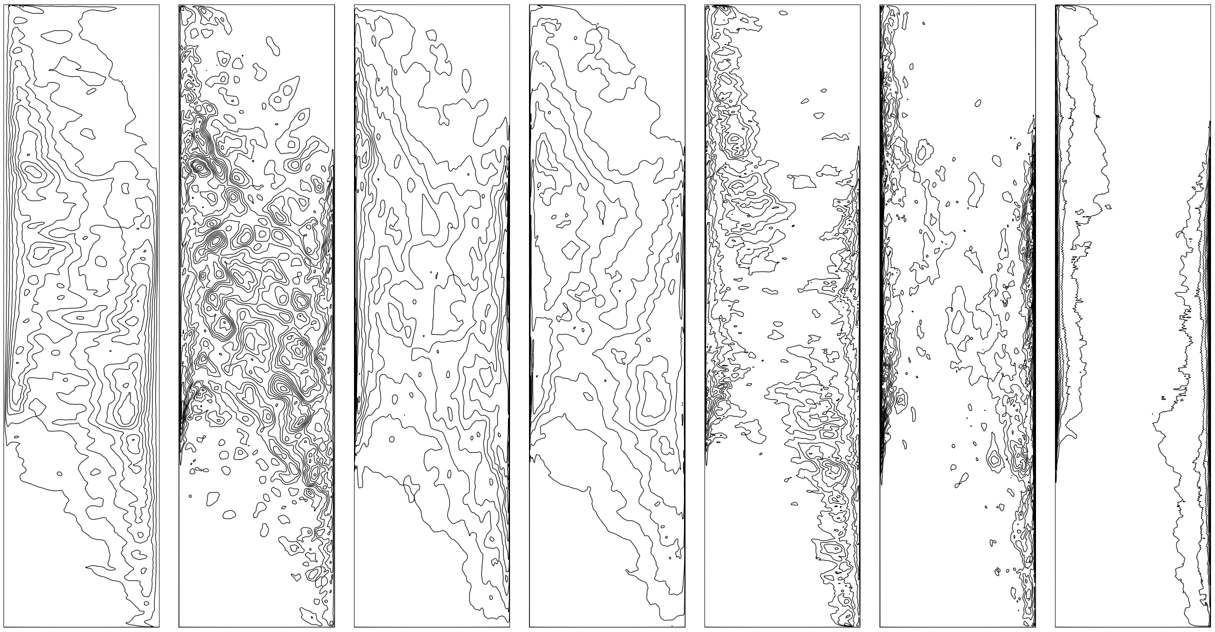
Z metodo velikih vrtincev v hitrostno vrtinčnem zapisu smo simulirali nestacionarno naravno konvekcijo v diferencialno greti kotanji z razmerjem stranic 1:4. Pojav smo raziskali pri Rayleighjevem številu, definiranem na širino kotanje, $Ra = 10^6$ - 10^{10}. Tok je stacionaren in laminaren pri $Ra = 10^6$. Pri $Ra = 10^7$ opazimo nastajanje vrtincev v mejni plasti ob obeh stenah. Vrtinci nastajajo periodično, pravimo, da je tok oscilatoren. Pri višjih Rayleighjevih številih opazimo prehod v turbulenten režim toka, saj tok postaja vedno bolj nepravilen, nesimetričen in kaotičen. Prehod smo raziskali s pomočjo prikaza diagramov v odvisnosti od časa, temperaturno vrtinčnih faznih diagramov in izračuna turbulentnih



Slika 6.12: Spektralna amplituda, izračunana iz časovnih serij temperature v točkah A=(0.0011,3.5) in B=(0.0301,3.5) za $Ra = 10^7$ *(levo zgoraj),* $Ra = 10^8$ *(desno zograj),* $Ra = 10^9$ *(levo spodaj) in* $Ra = 10^{10}$ *(desno spodaj).*



Slika 6.13: Turbulentne statistike za Ra = 10^8 (zgornja vrsta) in Ra = 10^9 (spodnja vrsta). Iz leve proti desni: Reynoldsove napetosti $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_x v'_y}$, $\overline{v'_y v'_y}$, turbulentna kinetična energija $k = \frac{1}{2}\overline{v'_i v'_i}$, turbulentni toplotni tokovi $\overline{v'_x T'}$, $\overline{v'_y T'}$ in varianca temperature $\overline{T'T'}$.



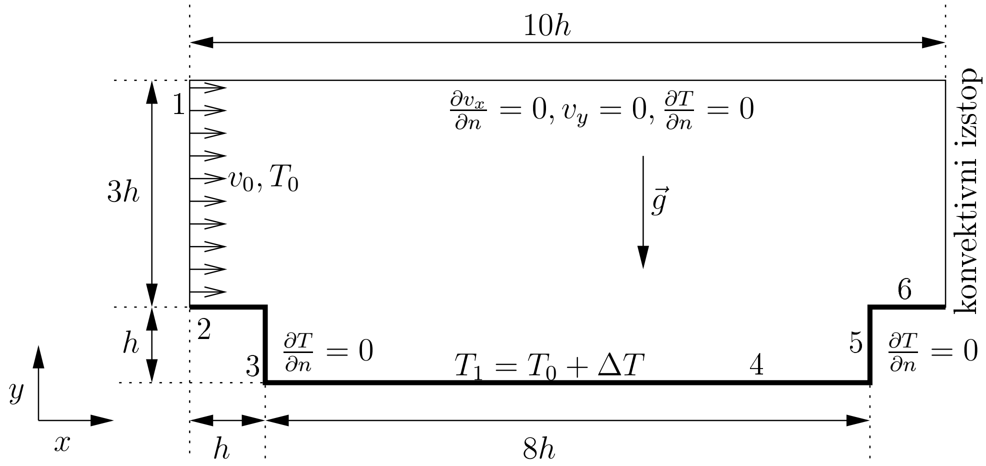
Slika 6.14: Turbulentne statistike za $Ra = 10^{10}$. *Glej napis k sliki 6.13.*

statistik. Ugotovili smo, da tok postane turbulenten najprej ob obeh vertikalnih stenah in nazadnje v sredini kotanje. Prenos toplote smo opisali z časovno povprečnim Nusseltovim številom, odvisnostjo povprečnega Nusseltovega števila od Rayleighjevega števila in odvisnostjo Nusseltovega števila od časa. Rezultati LES simulacij z dušeno podmrežno viskoznostjo se odlično ujemajo s preverjeno DNS rešitvijo Xin in Le Quéré [144]. Potrdili smo, da model podmrežne viskoznosti brez dušenja ne da pravilnih rezultatov. Pri primerjavi Piomellijevega in Van Driestovega dušenja smo ugotovili, da podata približno enake rezultate, pri čemer je povprečno Nusseltovo število pri Van Driestovem dušenju za odtenek bližje preverjeni rešitvi.

6.2 Tok preko plitve kotanje

Tokove preko kotanj srečujemo v mnogih inženirskih aplikacijah. Tokovi preko sončnih celic (Gomes [43], Zdanski et al. [148, 149, 150]) in v cestnih kanjonih (Vardoulakis et al. [132], Ravnik [94]) sta samo dva izmed mnogih primerov takšnih aplikacij.

Za tok preko sončnih celic je Gomes [43] eksperimentalno pokazal, da prenos toplote znatno povišamo, če na robu celice postavimo zračno zaporo. Numerično je problem raziskoval Zdanski s sodelavci [148, 149, 150]. Čeprav je tok preko sončne celice vedno tri-dimenzonalen, je Zdanski za prvi približek izbral samo dve dimenziji in tok zraka v ravnini celice. Ti poenostavitvi smo uporabili tudi mi. Sončna celica z ograjo oziroma plitva kotanja je skicirana na skici 6.15. Karakteristična dolžinska skala je višina kotanje, $h = 4cm$. Zrak $Pr = 0.71$ s temperaturo $T_0 = 300K$ teče preko kotanje. Dno kotanje je greto, predpostavimo stalno temperaturo $T_1 = T_0 + \Delta T$. Vstopna hitrost zraka v_0 in temperaturna razlika ΔT definirata Reynoldsovo in Rayleighovo število. V tabeli 6.4 smo predstavili kriterialna števila.



Slika 6.15: Geometrija in robni pogoji za tok preko plitve kotanje. Na vstopu 1 predpišemo enakomeren hitrostni profil s stalno temperaturo: $\vec{v} = (v_0, 0)$, $T = T_0$. Na trdnih stenah 2-6 je hitrost enaka nič. Na stenah 2 in 6 predpišemo temperaturo T_0, steni 3 in 5 pa sta idealno izolirani $\vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0$. Na spodnji steni 4 predpišemo konstantno temperaturo $T_1 = T_0 + \Delta T$. Na izstopu uporabimo Orlanski [82, 60] konvektivni izstopni robni pogoj. Na zgornjem robu predpostavimo razvit tok z $\vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0$ in $\vec{\nabla} v_x \cdot \vec{n} = 0$, $v_y = 0$.

Simulacije smo izvajali pri $Ra = 3 \cdot 10^5$, kar približno ustreza temperaturni razliki $\Delta t = 50K$. Izračune smo ponovili za tri vstopne hitrosti zraka $v_0 = 2m/s$, $4m/s$ in $8m/s$, kar ustreza Reynoldsovim številom $Re = 5000$, $Re = 10^4$ in $Re = 2 \cdot 10^4$. Pri najmanjši vstopni hitrosti zraka smo uporabili računsko mrežo *SC-25440* z 10^5 vozlišči, pri srednji *SC-33900* z $1.36 \cdot 10^5$ in pri najvišji hitrosti *SC-44900* z $2 \cdot 10^5$ vozlišči. Podatki o mrežah so navedeni v tabeli 6.5. Vpliv zanemarjanja elementov v BEM matriki integralov smo za te tri mreže raziskali v poglavju 5.9 in prikazali grafično na sliki 5.14.

Tabela 6.4: Reynoldsovo in Rayleighovo število za plitvo kotanjo s $h = 0.04m$, $T_0 = 300K$, $\nu = 16.1 \cdot 10^{-6} m^2/s$, $\beta_T = 1/T_0$, $\lambda = 0.026198 W/mK$ in Prandtlovo število $Pr = 0.71$.

Re	$v_0[m/s]$	$t_0 = L/v_0[s]$	Ra	$\Delta T[K]$	$q_0 = \frac{\lambda \Delta T}{h}[\frac{W}{m^2}]$
2500	1.01	0.0397	10^5	17.52	11.48
5000	2.02	0.0198	$2 \cdot 10^5$	35.05	22.95
10000	4.03	0.0099	$3 \cdot 10^5$	52.57	34.43
20000	8.07	0.0049	$5 \cdot 10^5$	87.61	57.38

Tabela 6.5: Računske mreže za tok preko plitve kotanje. Uporabili smo devet točkovne Lagrangeeve notranje celice in tri točkovne robne elemente.

mreža	št. elementov po robovih					št. robnih	št. notranjih	št. vseh
	1	2	3	4	6	elementov	celic	vozlišč
SC-25440	40	12	40	300	24	832	25440	102593
SC-33900	40	12	50	350	48	1000	33900	136601
SC-49900	50	24	63	400	70	1214	49900	200813

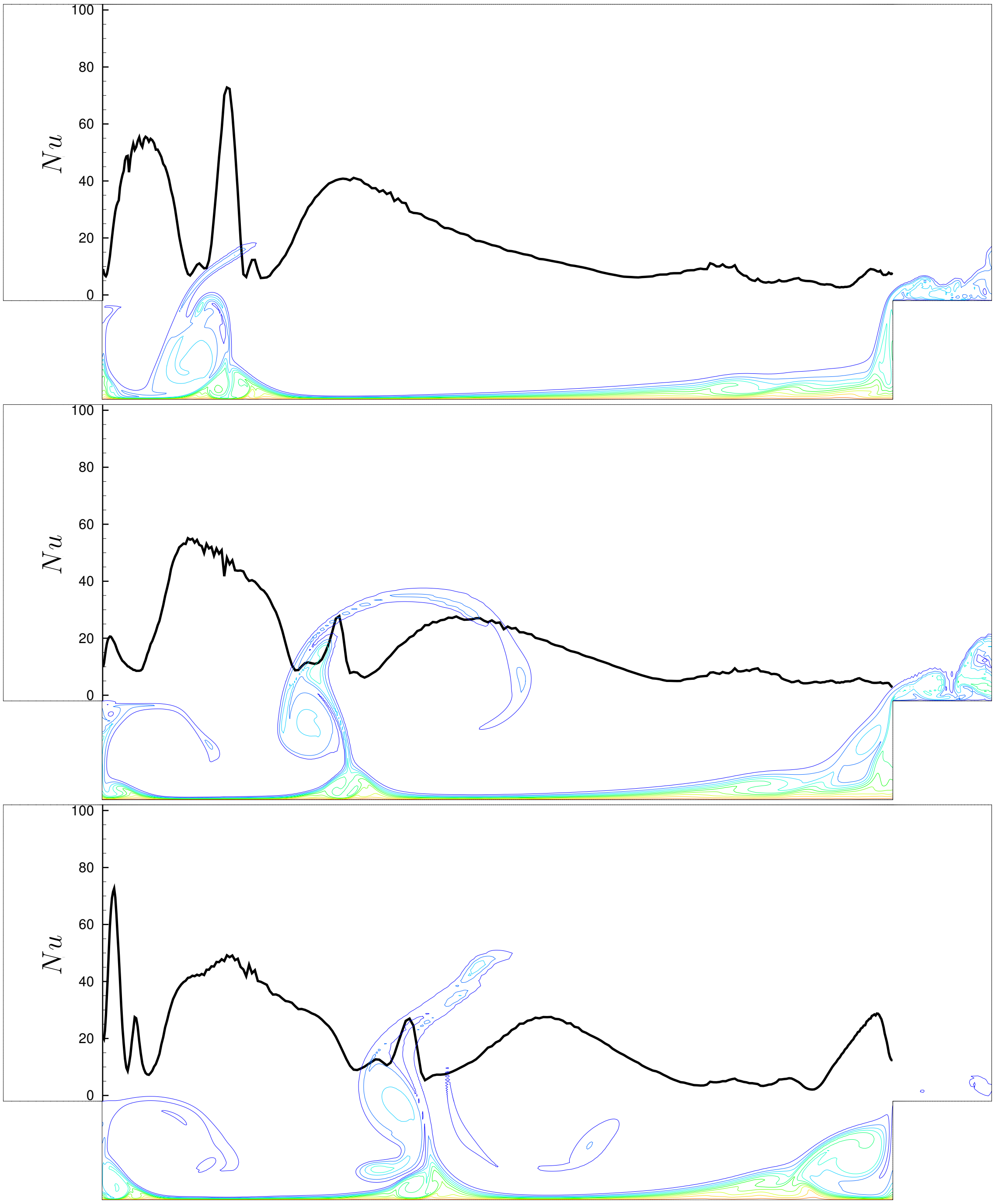
6.2.1 $Re = 5000, Ra = 5 \cdot 10^5$

Računali smo s časovnim korakom $\Delta t = 10^{-2}$ in brez podmrežnega modela. Strukture v toku so dovolj majhne, da jih z mrežo lahko opišemo. Zrak teče preko prve stene v kotanjo, kjer se zavrtinči. Opazimo trganje vrtincev, ki jih tok odnaša iz kotanje. Kotanja je široka nasproti višini ovire, zato primarni vrtinec za oviro ne obsega samo njen začetni del. Na sliki 6.16 prikazujemo temperaturna polja za tri časovne korake skupaj z Nusseltovim številom vzdolž spodnje stene. Pred steno na desni kotanje se tudi periodično pojavljajo vrtinci, ki jih tok počasi odnaša preko vogala ven iz kotanje. Ostri vogal na vrhu zračne zapore na desni tvori večje število majhnih tokovnih struktur, ki pa niso odločilnega pomena za prenos toplote iz dna kotanje.

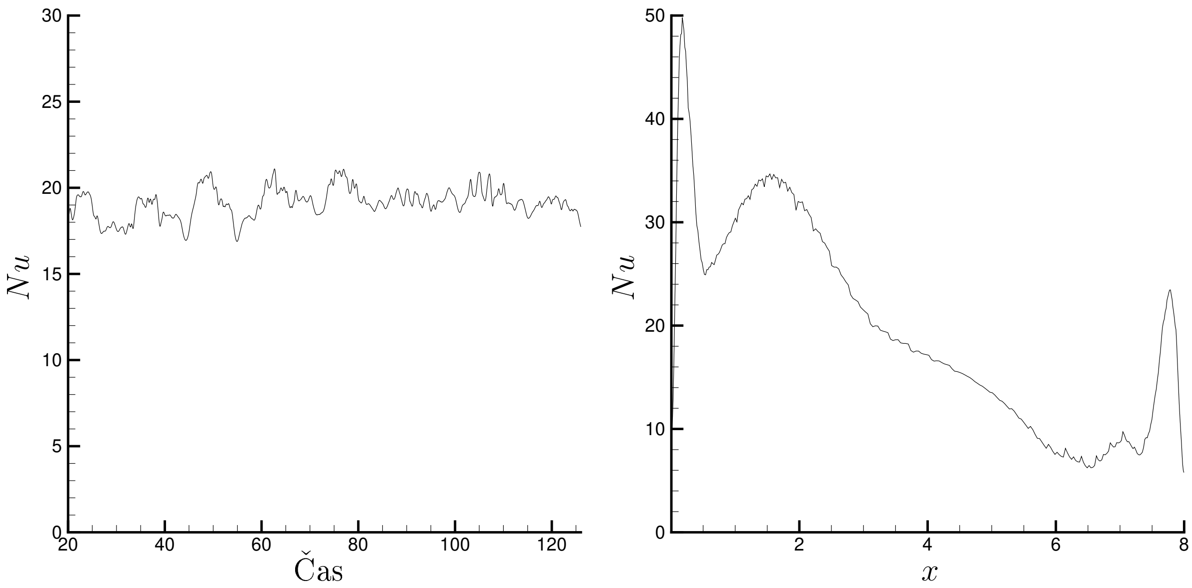
Na sliki 6.17 prikazujemo časovno povprečno Nusseltovo število vzdolž dna kotanje. Opazimo, da je prenos največju na levem, zavetrnem delu kotanje in najmanjši v sredini kotanje. Drugi vrh prenosa toplote pa opazimo na desni privetrni strani. Na isti sliki prikazujemo tudi po dnu kotanje povprečeno Nusseltovo število v odvisnosti od časa. Vidimo, da se prenos toplote s časom oscilirajoče spreminja in da ne odstopa veliko od povprečne vrednosti. Časovno povprečje po dnu kotanje povprečenega Nusseltovega števila je prikazano v tabeli 6.6.

Tabela 6.6: Časovno povprečje po dnu kotanje povprečenega Nusseltovega števila in iz njega izračunana gostota toplotnega toka. Podajamo primerjavo simulacije brez podmrežnega modela ($C = 0$) in simulacije s podmrežnim modelom z Van Driestovim dušenjem ob trdnih stenah LES_{vd}.

		$C = 0$		LES_{vd}	
Re	Ra	Nu	$Nu \cdot q_0$ $[\frac{W}{m^2}]$	Nu	$Nu \cdot q_0$ $[\frac{W}{m^2}]$
5000	$3 \cdot 10^5$	19.2	220.4		
10000	$3 \cdot 10^5$	30.2	1039	29.9	1029
20000	$3 \cdot 10^5$	45.5	2611	35.4	2031



Slika 6.16: Temperaturno polje in Nusseltovo število vzdolž spodnje stene za primer $Re = 5000$, $Ra = 5 \cdot 10^5$*. Izbrali smo tri časovne korake, ki nakazujejo na odlepljenje vrtinca za prvo steno. Med slikami je 1200 časovnih korakov oziroma* $1200 \cdot 10^{-2} \cdot 0.0198s = 0.24s$.



Slika 6.17: Povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene (desno) in v odvisnosti od časa (levo) $Re = 5000, Ra = 5 \cdot 10^5$. Simulacija brez podmrežnega modela.

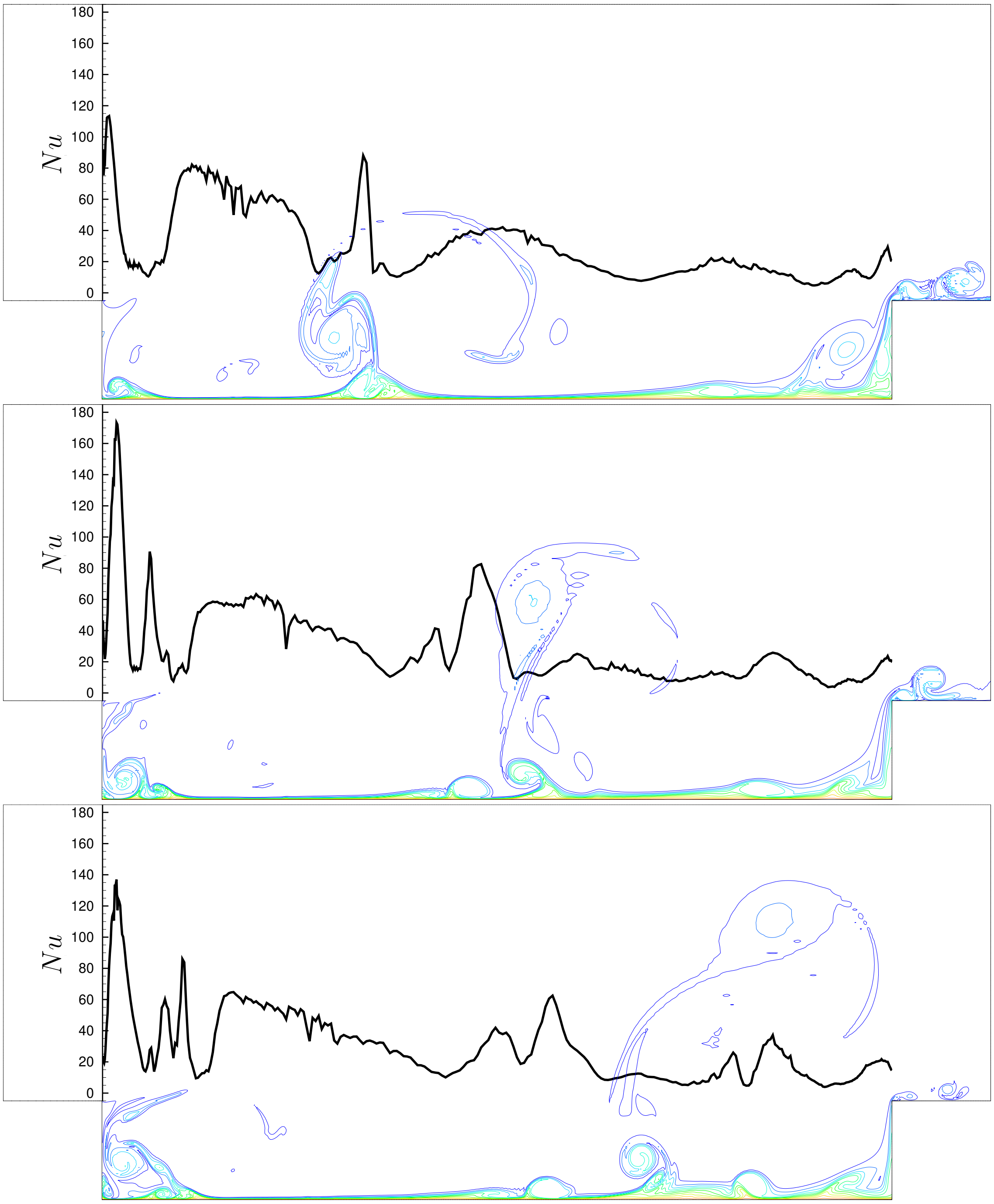
6.2.2 $Re = 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$

Računali smo s časovnim korakom $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. Primerjava simulacij brez podmrežnega modela in z dušenim podmrežnih modelom je pokazala, da bistvene razlike pri povprečnem Nusseltovem številu ni (tabela 6.6). Oba modela napovesta enak povprečni toplotni tok skozi spodnjo steno.

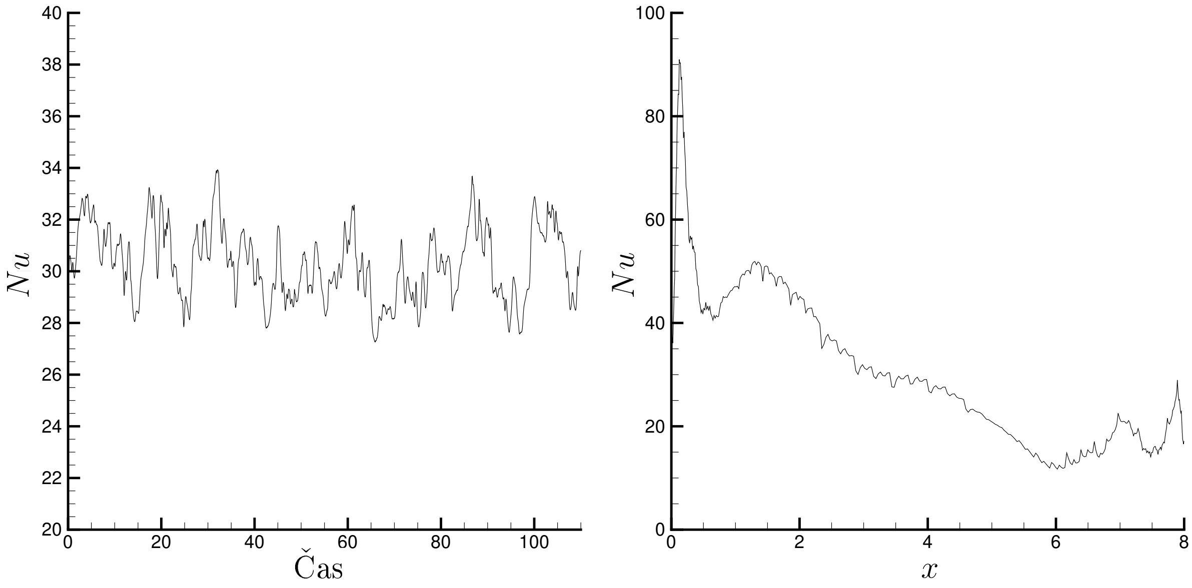
Tokovne razmere prikazujemo na sliki 6.18. Opazimo, da se je prenos toplote glede na simulacijo pri manjšem Reynoldovem številu povečal. Na slikah 6.19 in 6.20 prikazujemo časovno povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene kotanje za simulacijo brez in s podmrežnim modelom. Podobno kot pri manjšem Re številu je prenos toplote največji v zavetrni strani ograje na levi in pada proti ograji na privetrni strani. Prikazujemo tudi časovni potek po dnu kotanje povprečnega Nusseltovega števila. Opazimo še vedno relativno majhno nihanje okoli povprečne vrednosti, a hkrati tudi vidimo, da je v časovni sledi opaziti tudi hitra visokofrekvenčna nihanja Nusseltovega števila, kar nakazuje na pojav manjših struktur v toku. Tako kot povprečno Nusseltovo število, tudi kvalitativna primerjava prenosa toplote ocenjena z LES brez in s podmrežnim modelom ne pokaže razlike.

6.2.3 $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$

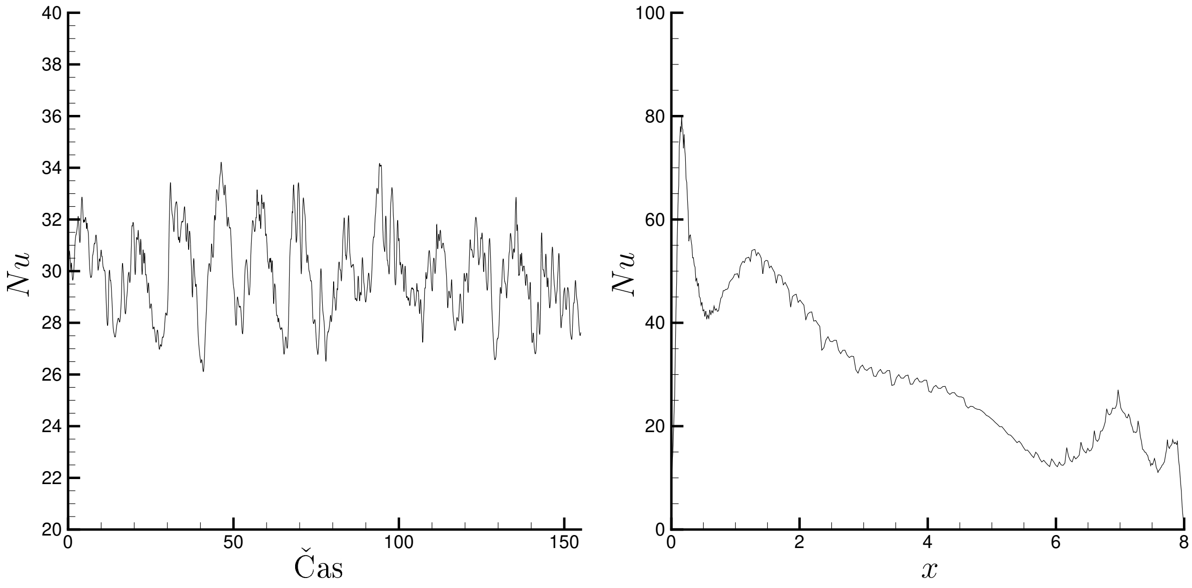
Pri najvišjem Reynoldsovem številu smo računali s časovnim korakom $\Delta t = 10^{-3}$. Temperaturno polje in Nusseltovo število vzdolž spodnje stene za simulacijo brez podmrežnega



Slika 6.18: Temperaturno polje in Nusseltovo število vzdolž spodnje stene za primer $Re = 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. *Simulacija brez podmrežnega modela. Med slikami je 600 časovnih korakov oziroma* $600 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0099s = 0.0297s$.



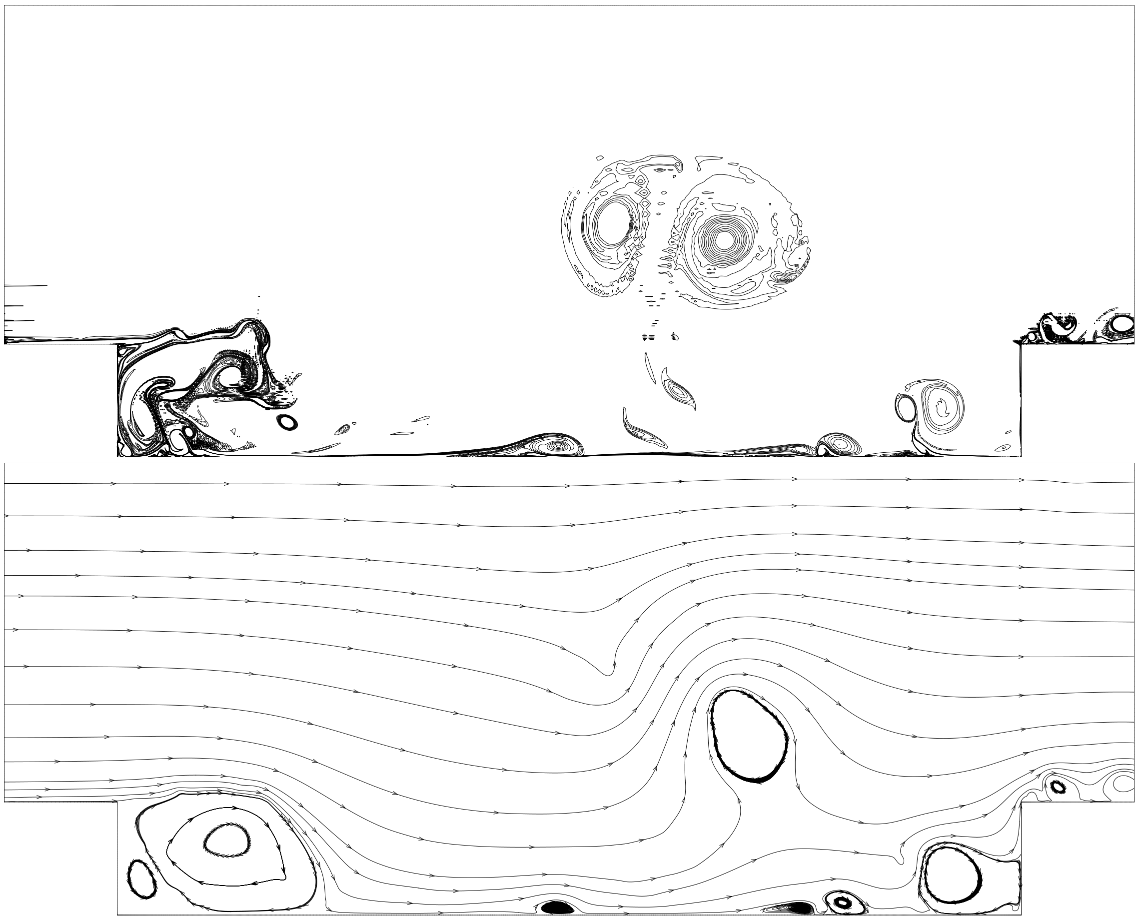
Slika 6.19: Povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene (desno) in v odvisnosti od časa (levo) $Re = 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. *Simulacija brez podmrežnega modela.*



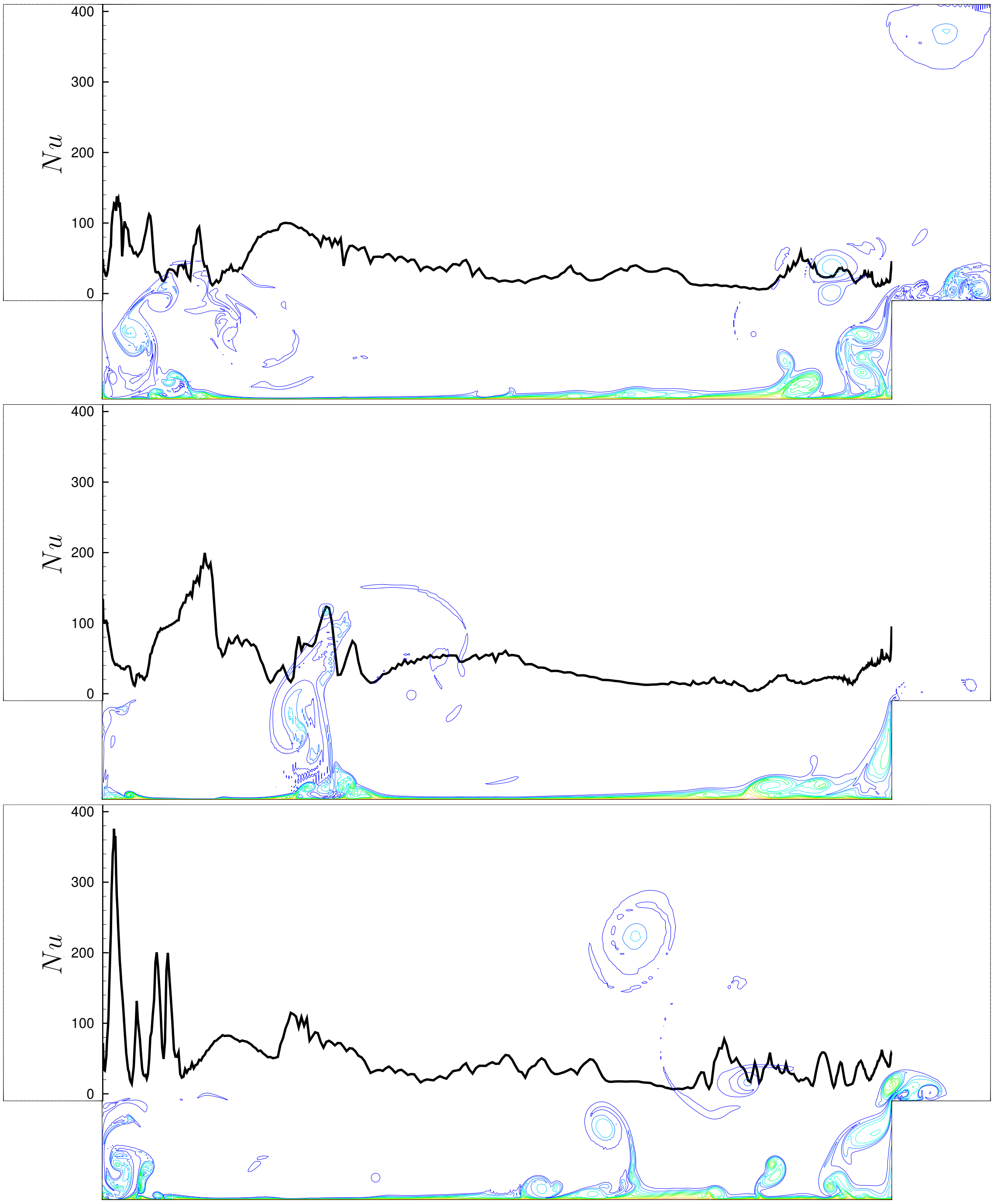
Slika 6.20: Povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene (desno) in v odvisnosti od časa (levo) $Re = 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. *Podmrežni model z Van Driestovim dušenjem ob stenah. Med slikami je 5000 časovnih korakov oziroma* $5000 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0049s = 0.0245s$.

modela smo prikazali na sliki 6.22, s podmrežnim modelom z Van Driestovim dušenjem pa na sliki 6.23. Za isti primer ob istem času prikazujemo tokovnice in izolinije vrtinčnosti na sliki 6.21. Časovno povprečne vrednosti Nusseltovega števila vzdolž kotanje pa so za obe simulaciji prikazani na slikah 6.24 in 6.25 ter v tabeli 6.6.

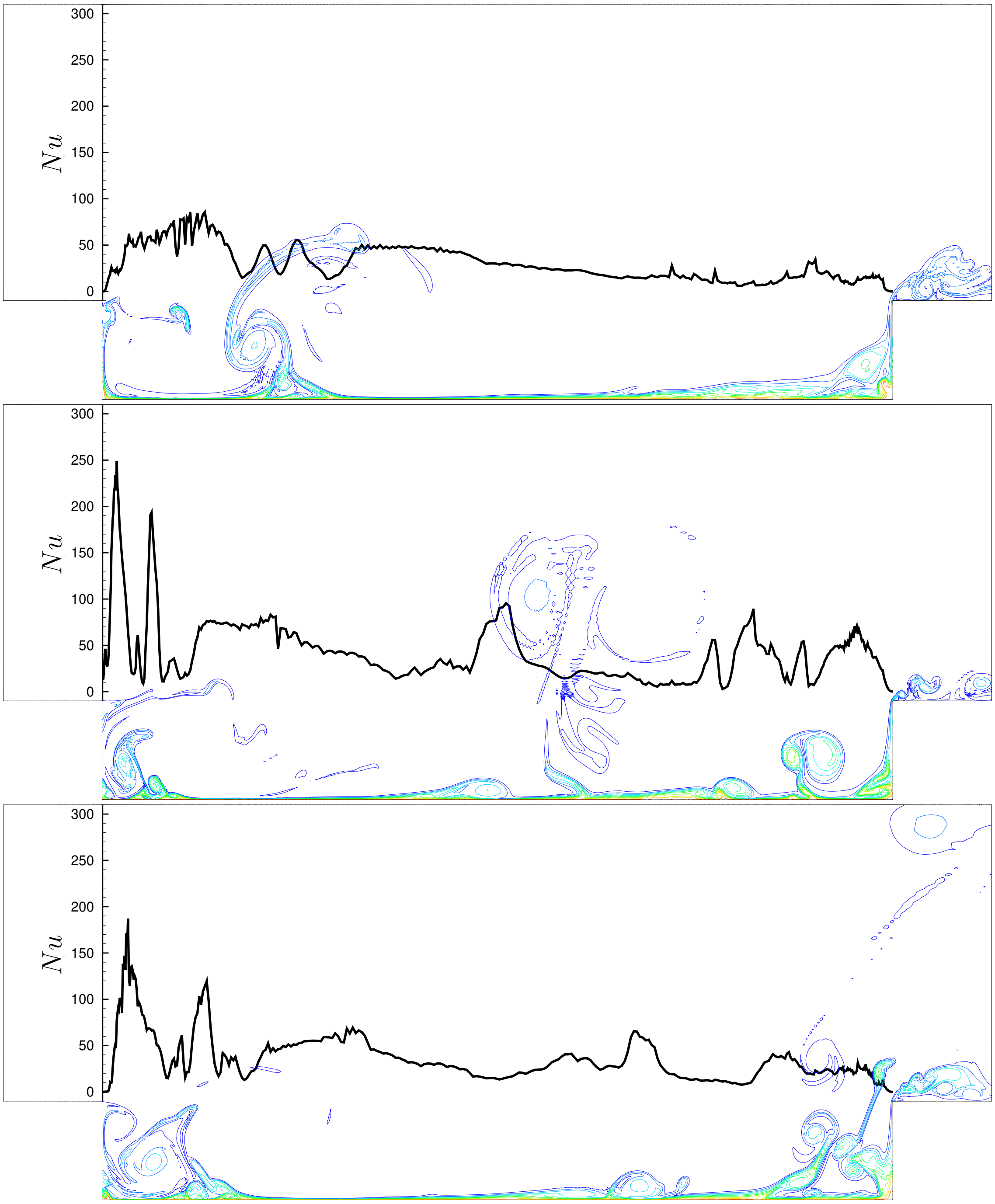
Opazimo veliko razliko v napovedanem prenosu toplote med simulacijo z in simulacijo brez podmrežnega modela. Podobno kot pri naravni konvekciji v kotanji, ki smo jo simulirali zgoraj, simulacija brez podmrežnega modela poda višje vrednosti za prenos toplote. Smatramo, da simulacija brez podmrežnega modela pri tem Reynoldsovem številu že podaja napačne rezultate. Vidimo, da je prenos toplote napovedan s simulacijo s podmrežnim modelom bližje rezultatom, ki jih je Zdanski s sodelavci [150] dobil za enak primer z RANS simulacijo.



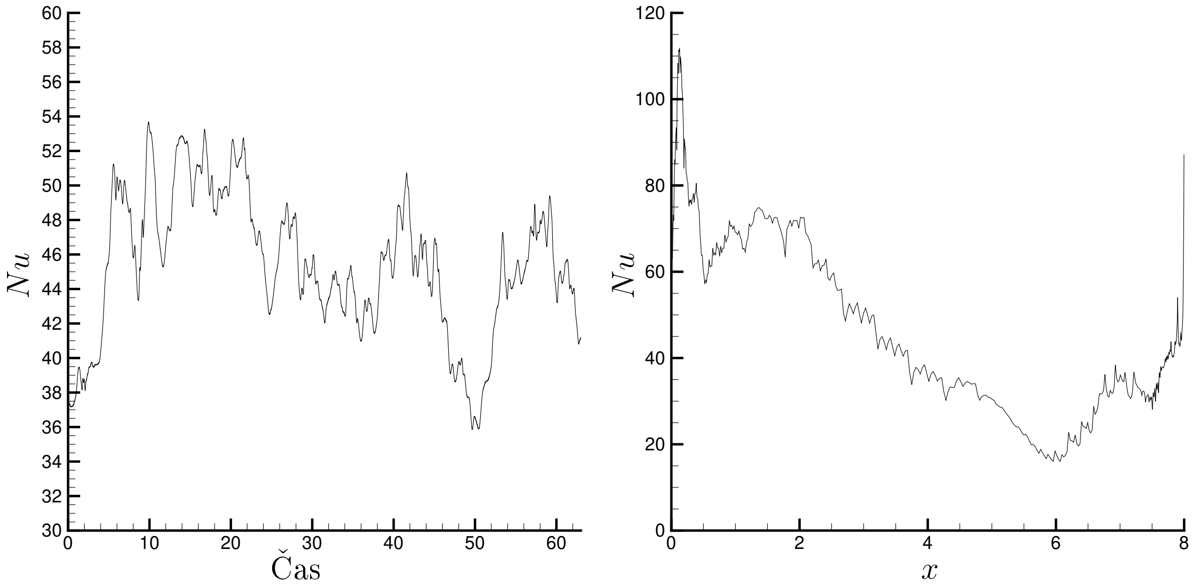
Slika 6.21: Vrtinčno polje in tokovnice za primer $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. Podmrežni model z Van Driestovim dušenjem ob stenah.



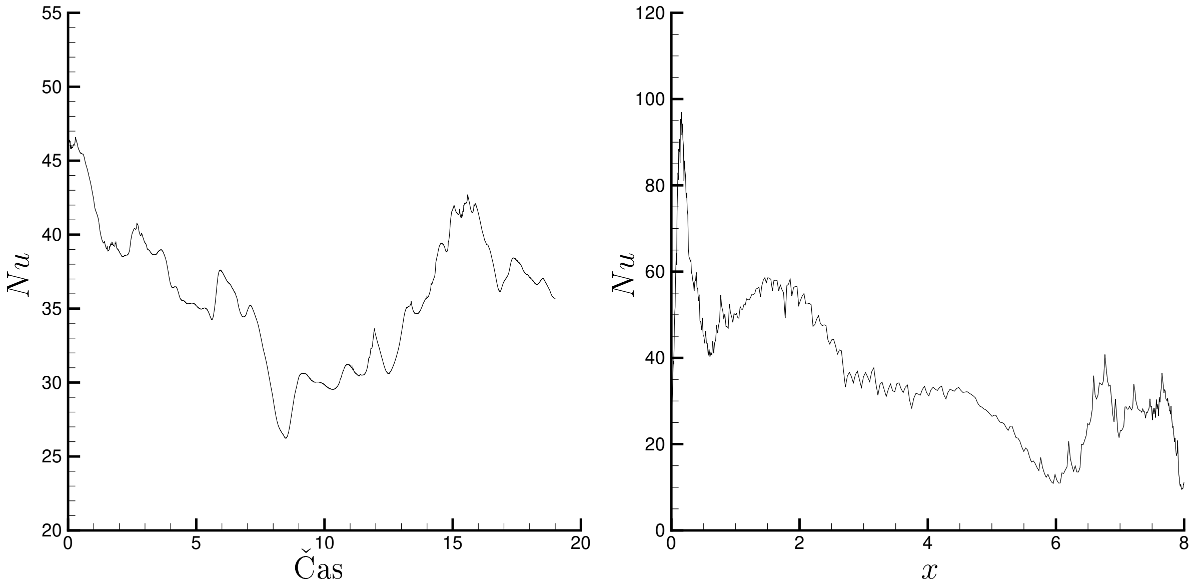
Slika 6.22: Temperaturno polje in Nusseltovo število vzdolž spodnje stene za primer $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. *Brez podmrežnega modela. Med slikami je 5000 časovnih korakov oziroma* $5000 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0049s = 0.0245s$.



Slika 6.23: Temperaturno polje in Nusseltovo število vzdolž spodnje stene za primer $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. *Podmrežni model z Van Driestovim dušenjem ob stenah. Med slikami je 5000 časovnih korakov oziroma* $5000 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0049s = 0.0245s$.



Slika 6.24: Povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene (desno) in v odvisnosti od časa (levo) za primer $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. Simulacija brez podmrežnega modela.



Slika 6.25: Povprečno Nusseltovo število vzdolž spodnje stene (desno) in v odvisnosti od časa (levo) za primer $Re = 2 \cdot 10^4, Ra = 5 \cdot 10^5$. Simulacija s podmrežnim modelom z Van Driestovim dušenjem ob stenah.

Poglavje 7

Zaključki

7.1 Razprava

V doktorski disertaciji smo predstavili numerično metodo za simulacijo turbulentnih tokov nestisljive viskozne newtonske tekočine v dveh dimenzijah. Uporabili smo hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev. Vzgonski člen smo upoštevali v okviru Boussinesqjevega približka.

Simulacija velikih vrtincev v hitrostno vrtinčnem zapisu vključuje tri, med seboj nelinearno odvisne, parcialne diferencialne enačbe. Enačba kinematike je Poissonovega tipa in povezuje filtrirano hitrostno in vrtinčno polje za vsak kraj in čas. Enačbi prenosa vrtinčnosti in ohranitve energije sta difuzijsko advektivnega tipa. Vključujeta podmrežni model, ki skrbi za vpliv najmanjših struktur v toku, ki jih s simulacijo velikih vrtincev ne dosežemo.

Numerično rešitev sistema nelinearnih enačb smo dosegli s kombinacijo metode robnih elementov, diskretne valčne transformacije in metode končnih elementov. Metodo robnih elementov smo nadgradili s pomočjo diskretne valčne transformacije in z njo rešili enačbo kinematike za neznanke na robu. Vpeljali smo diskretno valčno transformacijo za vektorje poljubnih dolžin, da smo lahko zagotovili uspešno uporabo metode na gostejših računskih mrežah. Valčno transformacijo smo uporabili za stiskanje matrik integralov, ki izvirajo iz metode robnih elementov. Matrike s shranjenimi vrednostmi integralov so odvisne samo od geometrije računske mreže, zato jih lahko izračunavamo vnaprej. Za sam izračun integralov ter valčno transformacijo matrike shranjenih integralov smo uporabili paralelno računanje na več procesorjih. Valčno stisnjeno matriko integralov uporabimo za izračun produkta z vektorjem vrtinčnosti po vozliščih v enačbi kinematike diskretizirani z metodo robnih elementov. Vpeljali smo nov način zanemarjanja elementov. Mejo za zanemarjanje smo določili kot del povprečne vrednosti absolutnih vrednosti vseh elementov v matriki. Dokazali smo, da tak način omogoča lažje izvedljiv algoritem zanemarjanja in da je relativna napaka izračunanega matrično vektorskega produkta premo sorazmerna z delom povprečne vrednosti absolutnih vrednosti vseh elementov v matriki, medtem ko je eksponentno odvisna od deleža zanemarjenih elementov. Natančnost izračunanega matrično vektorskega produkta smo raziskali in ugotovili, da večje matrike, ki so posledica uporabe gostejših računskih mrež, za enako natančnost produkta omogočajo večji delež zanemarjenih elementov.

Ko z metodo robnih elementov izračunamo vrednosti na robu, s pomočjo metode končnih elementov izračunamo hitrostno, vrtinčno in temperaturno polje v notranjosti. Metodo končnih elementov smo uporabili zato, ker ima metoda robnih elementov prevelike zahteve po pomnilniku in je zato na gostih mrežah ni bilo mogoče uporabiti. Ker prenosni enačbi vključujeta od kraja in časa odvisna člena, ki podajata prispevek struktur v toku, ki smo jih s filtrom odstranili, smo njuno reševanje temeljito preverili na analitičnih primerih.

Celoten numerični algoritem je iterativen zaradi nelinearnosti sistema enačb. Konvergenco dosežemo z uporabo podrelaksacije. Predstavili smo tako serijski kot tudi dva paralelna algoritma. Algebrajsko paraleliziran algoritem predvideva razdelitev dela po procesorjih na nivoju matrik. Izkazal se je za učinkovitega. Uporabljali smo ga za reševanje največjih primerov. Drug paralelni algoritem pa temelji na razdelitvi območja na dele. Tu vsak procesor rešuje svoj del območja, med seboj pa si izmenjujejo samo robne pogoje. Ta algoritem je časovno bolj učinkovit. Vendar smo ugotovili, da v primerjavi s serijskim izračunom pri visokih vrednostih kriterialnih števil naraste število iteracij nelinearne zanke, kar učinkovitost algoritma zmanjša.

Celotno numerično shemo smo preverili na analitičnih in laminarnih primerih toka nestisljive viskozne newtonske tekočine. Poseben poudarek smo posvetili vplivu zanemarjanja elementov v valčno transformirani matriki integralov na natančnost rezultatov. Določili smo primerno stopnjo zanemarjanja, ki tudi pri visokih vrednostih kriterialnega števila nima vpliva na simulacijo.

Z razvito numerično shemo smo simulirali nestacionarno naravno konvekcijo v diferencialno greti kotanji z razmerjem stranic 1:4. Pojav smo raziskali pri Rayleighjevem številu, definiranem na širino kotanje, $Ra = 10^6$ - 10^{10}. Tok je stacionaren in laminaren pri $Ra = 10^6$. Pri $Ra = 10^7$ opazimo nastajanje vrtincev v mejni plasti ob obeh stenah. Vrtinci nastajajo periodično. Pravimo, da je tok oscilatoren. Pri višjih Rayleighjevih številih opazimo prehod v turbulenten režim toka, saj tok postaja vedno bolj nepravilen, nesimetričen in kaotičen. Prehod smo raziskali s pomočjo prikaza diagramov v odvisnosti od časa, temperaturno vrtinčnih faznih diagramov in izračuna turbulentnih statistik. Ugotovili smo, da tok postane turbulenten najprej ob obeh vertikalnih stenah in nazadnje v sredini kotanje. Prenos toplote smo opisali s časovno povprečnim Nusseltovim številom, z odvisnostjo povprečnega Nusseltovega števila od Rayleighjevega števila in z odvisnostjo Nusseltovega števila od časa. Rezultati LES simulacij z dušeno podmrežno viskoznostjo se odlično ujemajo s preverjeno DNS rešitvijo (Xin in Le Quéré, [144]). Potrdili smo, da model podmrežno viskoznosti brez dušenja ne poda pravilnih rezultatov. Pri primerjavi Piomellijevega in Van Driestovega dušenja smo ugotovili, da podata približno enake rezultate, pri čemer je povprečno Nusseltovo število pri Van Driestovem dušenju za odtenek bližje preverjeni rešitvi.

Simulirali smo tudi tok preko plitve kotanje z gretim dnom. Pri različnih hitrostih tekočine smo ocenili odvisnost prenosa toplote iz dna v tekočino. Ugotovili smo, da je prenos toplote največji takoj za oviro, saj se tam ustvari vrtinec, ki zelo učinkovito odnaša segreto tekočino stran od stene.

7.2 Sklep

Trg in želja po stalnem napredku ustvarjata potrebo po čim hitrejšem in čim učinkovitejšem simuliranju turbulentnih tokov za napovedovanje delovanja in optimiranje naprav. Takim željam lahko na eni strani ugodimo z vlaganjem v razvoj računalniške opreme in ob obstoječih preverjenih algoritmih pridemo do možnosti simuliranja kompleksnejših sistemov. Ker pa se predvideva, da računalniške moči za vsakdanjo inženirsko uporabo direktne numerične simulacije ne bo na voljo še nekaj desetletij, je pomemben tudi razvoj novih numeričnih algoritmov in fizikalnih modelov.

V pričujoči disertaciji smo uspeli metodo robnih elementov nadgraditi z valčno transformacijo na tak način, da omogoča reševanje kompleksnejših primerov z večjo natančnostjo (gostejšimi računskimi mrežami). Za dosego tega cilja smo jo v algoritmu dopolnili z metodo končnih elementov.

Računskega algoritma nismo uporabili na klasičnem zapisu simulacije velikih vrtincev. Uporabili smo hitrostno vrtinčni zapis, ki po našem mnenju nudi več prednosti. S tem, ko tlak ni vključen v sistem enačb, se izognemo korekcijam tlaka v algoritmu, ki je zato bolj pregleden in stabilen. Vrtinčnost je veličina, ki vsebuje odvode hitrostnega polja. Ker je direktno vključena v sistem enačb, le ta z njo posledično vključuje višje redne približke hitrostnega polja.

Razvita numerična shema za simulacijo velikih vrtincev v hitrostno vrtinčnem zapisu se je pokazala za učinkovito in uporabno. V primerjavi s preverjeno rešitvijo podaja dobre rezultate.

7.3 Smernice za nadaljnje delo

Hitrostno vrtinčni zapis simulacije velikih vrtincev smo izpeljali v vektorski obliki. Zaradi pomanjkanja računske moči smo bili primorani izvajati simulacije samo v dveh dimenzijah. V prihodnje nameravamo numerični algoritem razširiti na tri dimenzije. Čeprav je razširitev na tri dimenzije iz matematičnega gledišča enostavna, bomo težko zagotavljali dovolj gosto mrežo za izvajanje LES simulacij. Pri prehodu na tri dimenzije se število enačb poveča, saj je potrebno reševati za tri komponente hitrosti in tri komponente vrtinčnosti. Prav tako je razmerje med površino roba proti prostornini območja v treh dimenzijah manj ugodno kot v dveh dimenzijah, zato se relativni delež robnih integralov poveča. Za uspešen prehod v tri dimenzije bo potrebno izboljšati učinkovitost valčnega stiskanja in algoritem učinkoviteje paralelizirati.

Razvita valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin in algoritem za valčno transformiran matrično vektorski produkt sta splošno uporabna v vseh vejah znanosti in tehnike. V prihodnje nameravamo izboljšati algoritem za paralelno računanje valčno transformirane matrike, ga pospešiti in zmanjšati število potrebnih procesorjev za izračun. Tudi izboljšanje učinkovitosti stiskanja je eden naših glavnih ciljev. Nadaljevali bomo z iskanjem načina, s katerim bi za stiskanje vektorjev poljubnih dolžin lahko uporabili Daubechies valčke namesto Haarovih.

V prihodnosti nameravamo tudi nadomestiti FEM za reševanje transportnih enačb z BEM. Uporabili bomo postopke, ki zmanjšujejo spominsko zahtevnost BEM, kot so uporaba podobmočij ali makro elementov.

V disertaciji smo razvili algoritme, ki so splošne narave in z njimi lahko rešujemo raznovrstne probleme. Kot eno izmed možnosti prihranka računalniškega spomina in računskega časa vidimo tudi navezavo algoritma na problem, ki ga rešujemo. Z znanimi robnimi pogoji in geometrijo območja si lahko pomagamo pri izboljšanju učinkovitosti algoritma.

Priloge

A1 Filtriranje

Operacija filtriranja tokovnega polja $u(\vec{r},t)$ je definirana s konvolucijskim integralom

$$\overline{u}(\vec{x},t) = \int_\Omega G(\vec{r},\vec{x})u(\vec{x}-\vec{r},t)d\vec{r}, \tag{A1.1}$$

kjer integral teče po celotnem območju toka Ω, filterna funkcija pa je normirana

$$\int_\Omega G(\vec{r},\vec{x})d\vec{r} = 1. \tag{A1.2}$$

Filter je homogen, če ni odvisen od $\vec{x}$:

$$G(\vec{r},\vec{x}) = G(\vec{r}). \tag{A1.3}$$

Rezidualno polje definiramo z

$$u'(\vec{x},t) = u(\vec{x},t) - \overline{u}(\vec{x},t). \tag{A1.4}$$

V splošnem filtrat rezidualnega polja ni enak nič:

$$\overline{u}'(\vec{x},t) \neq 0. \tag{A1.5}$$

Operaciji filtriranja in odvajanja po času komutirata

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}, \tag{A1.6}$$

medtem ko odvajanje po koordinati

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} + \int_\Omega u_i(\vec{x}-\vec{r},t)\frac{\partial G(\vec{r},\vec{x})}{\partial x_j}d\vec{r} \tag{A1.7}$$

komutira s filtriranjem samo, če je filter homogen (A1.3).

Filtriranje v eni dimenziji

Lastnosti različnih filtrov si najlažje ogledamo v eni dimenziji. Obravnavali bomo naključno skalarno funkcijo $u(x)$, ki je definirana za vse $x \in [-\infty, \infty]$. Če je $G(r)$ homogen filter, dobimo filtrirano funkcijo s konvolucijo:

$$\overline{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)u(x-r)dr. \tag{A1.8}$$

Najpogosteje uporabljane filtre smo, skupaj z njihovimi prenosnimi funkcijami, našteli v preglednici A1.1 . Grafično so filtri prikazani na sliki A1.1, prenosne funkcije pa na sliki A1.2.

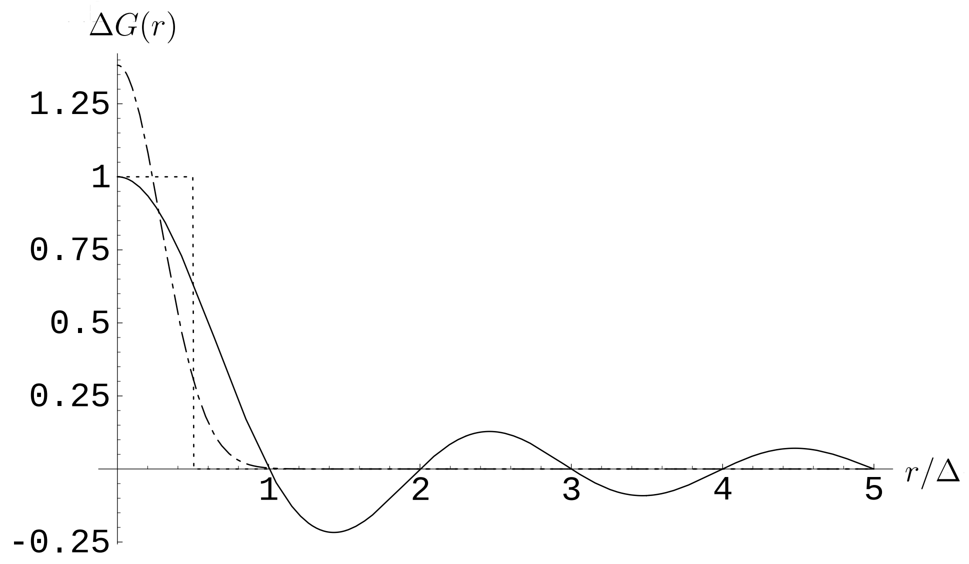
Lastnosti filtra določa širina filtra Δ, oziroma iz nje izpeljano kritično valovno število:

$$k_c = \frac{\pi}{\Delta}. \tag{A1.9}$$

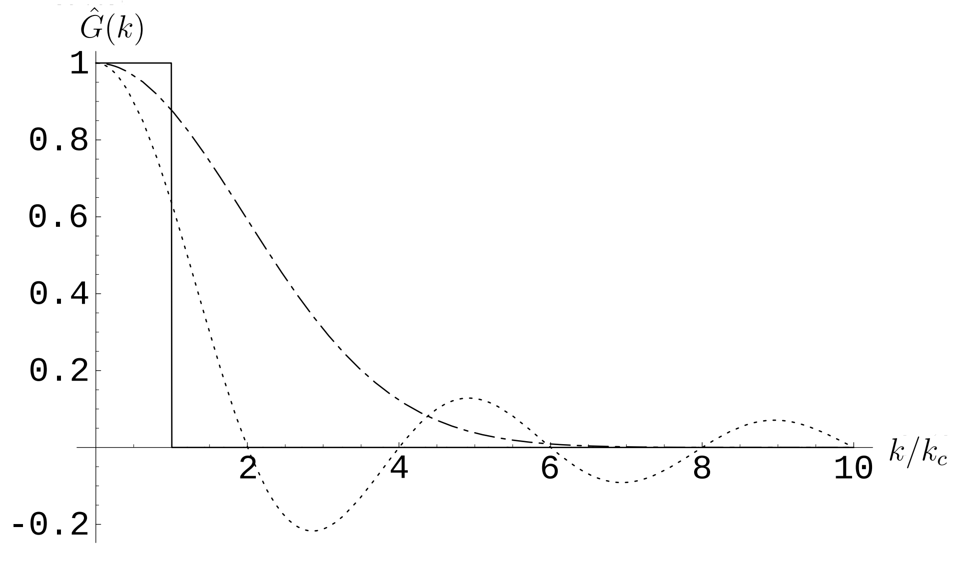
Oster spektralni filter poreže vsa valovna števila nad kritičnim. Oglejmo si limitni primer zelo velike širine filtra. Ko je Δ veliko večja od reda velikosti turbulence (domene), takrat gre kritično valovno število proti nič in filtrirano polje proti povprečnem polju. Rezidualni napetostni tenzor pa proti Reynoldsovem napetostnem tenzorju. Ko gre $r/\Delta \to 0$, postanejo filtri $G(r)$ konstantni in operacija filtriranja pa je povprečevanje.

Tabela A1.1: Pogosto uporabljani filtri in njihove prenosne funkcije. Širina filtra je Δ, kritično valovno število pa $k_c = \pi/\Delta$.

Ime	Filter	Prenosna funkcija
splošen izraz	$G(r)$	$\hat{G}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} G(r)dr$
škatlast filter	$\frac{1}{\Delta} H(\frac{1}{2}\Delta - \lvert r \rvert)$	$\frac{\sin(\frac{1}{2}k\Delta)}{\frac{1}{2}k\Delta}$
Gaussov filter	$\sqrt{(\frac{6}{\pi\Delta^2})} \exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{24}\right)$
oster spektralni filter	$\frac{\sin(\pi r/\Delta)}{\pi r}$	$H(k_c - \lvert k \rvert)$



Slika A1.1: Filtri $G(r)$ pomnoženi s širino Δ. S polno črto je označen oster spektralen filter, s pikčasto črto škatlast filter in s črto-piko Gaussov filter.



Slika A1.2: Prenosne funkcije filtrov $\hat{G}(k)$. S polno črto je označena prenosna funkcija ostrega spektralnega filtra, s pikčasto črto škatlast filter in s črto-piko pa prenosna funkcija Gaussovega filtra.

A2 Gaussov in Greenova stavka

Gaussov stavek

Naj bo Ω območje z robom Γ in $\vec{F}$ vektorsko polje, ki je definirano na tem območju. Gaussov[1] stavek pove, da je skupen pretok polja $\vec{F}$ skozi zaprt rob Γ enak prostorninskemu integralu po Ω divergence tega polja:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega, \tag{A2.1}$$

kjer ima infinitezimalno majhen del ploskve $d\vec{\Gamma} = \vec{n} d\Gamma$ normalno smer ven iz območja Ω. Gaussov stavek za skalarno polje u pa se glasi

$$\int_\Gamma u d\vec{\Gamma} = \int_\Omega \vec{\nabla} u d\Omega. \tag{A2.2}$$

Poznamo več izpeljanih oblik Gaussovega stavka. Posebno priročna je naslednja oblika

$$\int_\Gamma \vec{F} \times d\vec{\Gamma} = \int_\Gamma \vec{F} \times \vec{n} d\Gamma = -\int_\Omega \vec{\nabla} \times \vec{F} d\Omega. \tag{A2.3}$$

Greenov prvi stavek

Naj bosta u in $u^\star$ skalarni polji definirani na Ω. Ko vstavimo $\vec{F} = u\vec{\nabla} u^\star$ v Gaussov stavek A2.1, dobimo

$$\int_\Gamma u\vec{\nabla} u^\star \cdot d\vec{\Gamma} = \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla} u^\star) d\Omega.$$

Odvajamo pod integralom na desni strani zgornje enačbe, integrala ločimo in zapišemo Greenov[2] prvi stavek

$$\int_\Gamma u\vec{\nabla} u^\star \cdot d\vec{\Gamma} = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u^\star d\Omega + \int_\Omega u \nabla^2 u^\star d\Omega. \tag{A2.4}$$

Greenov drugi stavek

V Greenovem prvem stavku A2.4 zamenjamo polji u in $u^\star$:

$$\int_\Gamma u^\star \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Gamma} = \int_\Omega \vec{\nabla} u^\star \cdot \vec{\nabla} u d\Omega + \int_\Omega u^\star \nabla^2 u d\Omega.$$

Zgornjo enačbo odštejemo od Greenovega prvega stavka A2.4 in dobimo Greenov drugi stavek

$$\int_\Gamma \left(u\vec{\nabla} u^\star - u^\star \vec{\nabla} u\right) \cdot d\vec{\Gamma} = \int_\Omega (u\nabla^2 u^\star - u^\star \nabla^2 u) d\Omega. \tag{A2.5}$$

[1] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemški matematik
[2] George Green (1793–1841), britanski matematik in fizik

A3 O normali in tangenti

Normala na ploskev je vektor $\vec{n}$ enotske dolžine, usmerjen pravokotno na ploskev ven iz območja. V dveh dimenzijah ga zapišemo

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix}; \qquad |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1. \tag{A3.1}$$

Tangenta na ploskev je enotski vektor $\vec{t}$ pravokoten normali

$$\vec{t} = \begin{vmatrix} -n_y \\ n_x \end{vmatrix}; \qquad \vec{n} \cdot \vec{t} = 0; \qquad t_k = e_{lk} n_l. \tag{A3.2}$$

Večkrat uporabljamo izraza za odvod po normali $\frac{\partial}{\partial n}$ in tangenti $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \cdot \vec{n}, \tag{A3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \cdot \vec{n}, \tag{A3.4}$$

oziroma v komponentnem zapisu

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_k} n_k, \tag{A3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} t_k = \frac{\partial}{\partial x_k} e_{lk} n_l. \tag{A3.6}$$

Za vajo in ker nam pri izpeljavi integralske oblike enačbe kinematike pride prav, dokažimo spodnjo enakost:

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + e_{ij} \omega n_j = -e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t}. \tag{A3.7}$$

Vstavimo definiciji odvodov po normali (A3.5) in tangenti (A3.6) v enakost in pišemo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial n} + e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k + e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} e_{lk} n_l = \\ = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} n_1 &+ \frac{\partial v_i}{\partial x_2} n_2 + e_{ij} \left(-\frac{\partial v_j}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial v_j}{\partial x_2} n_1\right) = \\ = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_2}\right) n_1 &+ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} - e_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_1}\right) n_2 = -e_{ij} \omega n_j. \end{aligned} \tag{A3.8}$$

Zadnja enakost zgoraj drži zato, ker ko izberemo $i, j, 1, 2$ vidimo, da je en od oklepajev enak divergenci hitrostnega polja $\equiv 0$, drugi pa vrtinčnosti.

V dveh dimenzijah lahko normalno v_n in tangentno v_t hitrost izrazimo z v_x, v_y takole:

$$v_n = n_x v_x + n_y v_y, \qquad v_t = -n_y v_x + n_x v_y, \tag{A3.9}$$

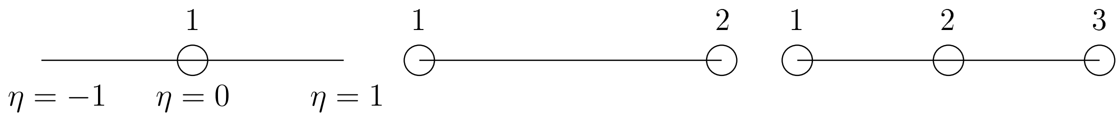
$$v_x = n_x v_n - n_y v_t, \qquad v_y = n_y v_n + n_x v_t. \tag{A3.10}$$

A4 Interpolacijske funkcije

Obravnavamo dvodimenzionalno območje Ω z enodimenzionalnem robom Γ. Rob je razdeljen v robne elemente, območje pa v celice. Denimo, da poljubno veličino f poznamo samo v nekaj točkah znotraj posameznega robnega elementa in notranje celice; f_i. Vrednost v drugih točkah dobimo z interpolacijo. Naj bodo N_i take interpolacijske funkcije, da zapišemo vrednost veličine f v poljubni točki elementa oz. celice takole

$$f(\xi,\eta) = \sum N_i(\xi,\eta) f_i, \tag{A4.1}$$

kjer smo v elemetu oz. celici privzeli lokalni koordinatni sistem, v katerem η in ξ zavzemata vrednosti med $[-1,1]$. Skice konstantnega, linearnega in paraboličnega robnega elementa



Slika A4.1: Konstantni, linearni in parabolični robni element. S krogci so označene znane vrednosti veličine f_i.

so na sliki A4.1. Interpolacijske funkcije za vse tri tipe robnih elementov pa so:

$$N_1^R = 1; \tag{A4.2}$$

$$N_1^R = \frac{1-\eta}{2}, \qquad N_2^R = \frac{1+\eta}{2}; \tag{A4.3}$$

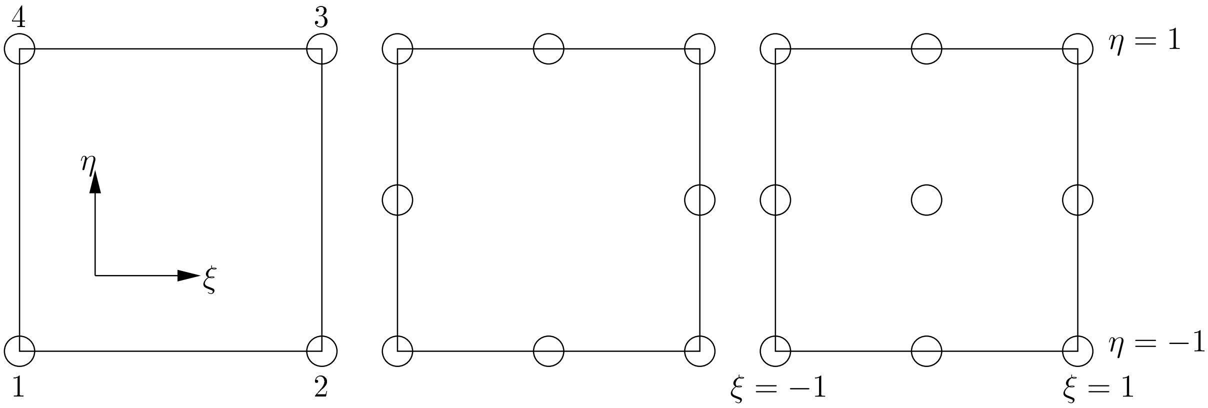
$$N_1^R = \frac{1}{2}\eta(\eta-1), \qquad N_2^R = (1-\eta)(1+\eta), \qquad N_3^R = \frac{1}{2}\eta(\eta+1). \tag{A4.4}$$

Na sliki A4.2 so skicirane notranje celice (oziroma robne, v tridimenzionalnem primeru). Interpolacijske funkcije za kvadratno notranjo celico so

$$\begin{aligned} N_1^O &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi), & N_2^O &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi), \\ N_3^O &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi), & N_4^O &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi). \end{aligned} \tag{A4.5}$$

Interpolacijske funkcije za Serendipityjevo notranjo celico pa so

$$\begin{aligned} N_1^O &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)(-\eta-\xi-1), & N_5^O &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \\ N_2^O &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi)(+\eta-\xi-1), & N_6^O &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\ N_3^O &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi)(+\eta+\xi-1), & N_7^O &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\ N_4^O &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi)(-\eta+\xi-1), & N_8^O &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta). \end{aligned} \tag{A4.6}$$



Slika A4.2: Kvadratna, Serendipityjeva in Lagrangeeva notranja celica. S krogci so označene znane vrednosti veličine f_i.

Interpolacijske funkcije za Lagrangeevo notranjo celico so

$$
\begin{aligned}
N_1^O &= \frac{1}{4}\eta(\eta-1)\xi(\xi-1), & N_5^O &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)\xi(\xi-1),\\
N_2^O &= \frac{1}{4}\eta(\eta+1)\xi(\xi-1), & N_6^O &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)\eta(\eta+1),\\
N_3^O &= \frac{1}{4}\eta(\eta+1)\xi(\xi+1), & N_7^O &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)\xi(\xi+1),\\
N_4^O &= \frac{1}{4}\eta(\eta-1)\xi(\xi+1), & N_8^O &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)\eta(\eta-1),\\
& & N_9^O &= (1-\eta^2)(1-\xi^2).
\end{aligned}
\tag{A4.7}
$$

A5 Transformacija koordinatnih sistemov

Preslikajmo kartezijev koordinatni sistem (x, y) v koordinatni sistem (ξ, η) z

$$\xi = \xi(x, y), \tag{A5.1}$$
$$\eta = \eta(x, y). \tag{A5.2}$$

S pomočjo pravil za odvajanje lahko pišemo

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \tag{A5.3}$$

in

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \tag{A5.4}$$

S primerjavo enačb (A5.3) in (A5.4) ugotovimo, da mora biti produkt obeh matrik odvodov identiteta, zato:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \tag{A5.5}$$

kjer je Jacobijeva[3] determinanta J enaka

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}. \tag{A5.6}$$

Za zapis koordinat x, y v celici s koordinatnim sistemom ξ, η uporabimo interpolacijske funkcije (priloga A4). Znotraj celice velja

$$x = \sum_i N_i x_i \qquad y = \sum_i N_i y_i, \tag{A5.7}$$

kjer so N_i interpolacijske funkcije in x_i ter y_i znane vrednosti v vogalih celice. Jacobijevo determinanto izračunamo s pomočjo (A5.7) in (A5.6) takole:

$$J = \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}. \tag{A5.8}$$

Razvoj po interpolacijskih funkcijah (A5.7) uporabimo tudi za izračun matrike (A5.5):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & -\sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ -\sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{pmatrix}. \tag{A5.9}$$

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), nemški matematik

Bazna vektorja v lokalnem koordinatnem sistemu (ξ, η) zapišemo z globalnima baznima vektorjema $(\vec{i}, \vec{j})$ takole:

$$\vec{i}_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\vec{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A5.10}$$

$$\vec{j}_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\vec{j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A5.11}$$

$$\vec{k}_\zeta = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A5.12}$$

Prostorski element $d\Omega = dxdy$ zapišemo v lokalnem koordinatnem sistemu s pomočjo baznih vektorjev (A5.10), (A5.11) in (A5.12):

$$d\Omega = dxdy = (\vec{i}_\xi \times \vec{j}_\eta) \cdot \vec{k}_\zeta d\xi d\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = J d\xi d\eta \tag{A5.13}$$

A6 Izstopni robni pogoj

V večini primerov uporabe računalniške dinamike tekočin na realnih tokovih iščemo rezultat na računskem območju, ki prekriva le majhen del celotnega fizičnega območja. To dosežemo s predpisom t.i. odprtega oziroma izstopnega robnega pogoja. Ker nimamo nobenih informacij o toku izven računskega območja, je potrebno na izstopnem robu na podlagi lastnosti fizikalnega modela, ki ga obdelujemo, določiti približek robnega pogoja.

V primerih toka v kanalu ali toka preko ovire v kanalu (valj, kvader) je glavna smer toka normalna na izstop. Orlanski [82] in Kobayashi et al. [60] so na izstopu predvideli monokromatično valovanje takole:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \tag{A6.1}$$

kjer je ϕ ena izmed funkcij polja (komponenta hitrosti, vrtinčnost, temperatura), t je čas, $\frac{\partial}{\partial n}$ pa odvod po normali na izstopni rob. Privzamemo, da je potovalna hitrost valovanja c enaka vstopni hitrosti tekočine v kanal $c = v_\infty$. Odvod po času diskretiziramo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_B^{n+1} - \phi_B^n}{\Delta t}, \tag{A6.2}$$

kjer je ϕ_B^{n+1} veličina na robu v naslednjemu časovnemu koraku, ϕ_B^n pa v sedanjemu. Odvod po normali pa s pomočjo enačbe (A3.5) zapišemo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x\frac{\phi_B^n - \phi_K^n}{\Delta x} + n_y\frac{\phi_B^n - \phi_K^n}{\Delta y}, \tag{A6.3}$$

kjer je ϕ_K^n vrednost veličine v vozlišču znotraj območja, ki je najbližje robnemu vozlišču, za katerega robno vrednost računamo. Enačbi (A6.2) in (A6.3) uporabimo v valovni enačbi (A6.1) in dobimo:

$$\phi_B^{n+1} = \phi_B^n - v_\infty \Delta t \left\{ n_x\frac{\phi_B^n - \phi_K^n}{\Delta x} + n_y\frac{\phi_B^n - \phi_K^n}{\Delta y} \right\}. \tag{A6.4}$$

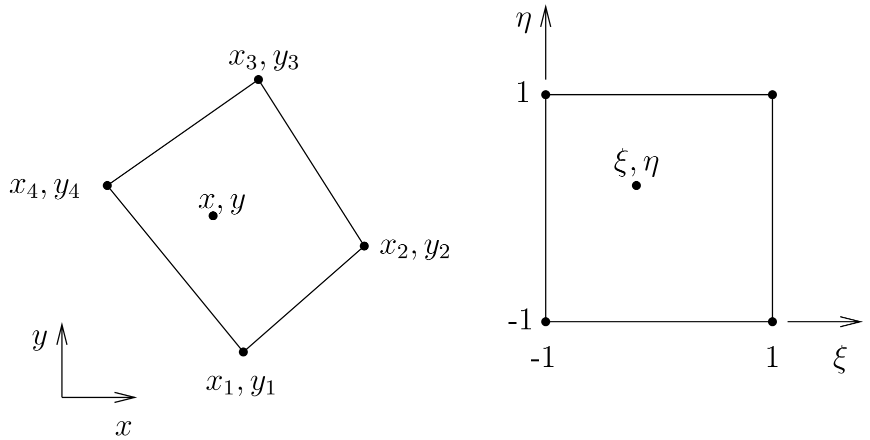
A7 Sledenje delcev v toku

V mnogih inženirskih aplikacijah se srečujemo z delci v toku. Na primer, v izpušni cevi motorja. Večkrat so delci zelo majhni in lahko njihov vpliv na tekočino zanemarimo. Za vizualizacijo tokovnih polj, izračunanih v okviru tega dela, smo izpeljali algoritem za sledenje delcev. Predpostavili smo, da delci nimajo mase in da nimajo povratnega vpliva na tok.

V načelu je algoritem preprost. Razpolagamo s tokovnimi polji, ki si sledijo z dovolj majhnim časovnih korakom. Izračunamo hitrost na mestu delca in ga na podlagi te hitrosti za zelo majhen časovni korak pomaknemo naprej. Postopek ponavljamo, dokler s časom ne pridemo do naslednjih rezultatov, nakar začnemo uporabljati novo tokovno polje.

Edina težava pri numerični izvedbi zgoraj opisanega algoritma je v določanju elementa, v katerem je delec in nato interpolaciji hitrosti znotraj elementa. V tem delu uporabljamo večinoma devet točkovne elemente, ki imajo samo štiri točkovno obliko. To pomeni, da štiri vozlišča ležijo na vogalih, štiri na premicah med vogali, zadnji pa v elementu. S stališča oblike je torej dovolj, če element opišemo s štirimi vozlišči. Alternativno lahko vsak 9 točkovni element spremenimo v štiri štiri točkovne.

Imamo torej štiri točke povezane z daljicami in zanima nas ali je poljubno izbrana peta točka v liku, ki ga določajo štiri daljice ali ne. Na skici A5.1 je prikazana transformacija



Slika A5.1: Štiri točkovni element in njegova preslikava v koordinatni sistem ξ, η.

elementa, določenega s štirimi vozlišči (x_i, y_i), v lokalen koordinatni sistem (ξ, η). Točko znotraj elementa (x, y) zapišemo v koordinatnem sistemu (ξ, η) s pomočjo interpolacijskih funkcij (A4.5):

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) x_i, \qquad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta) y_i. \tag{A7.1}$$

Zanima nas ravno obratna transformacija; na podlagi znane točke (x, y) bi radi izračunali koordinati v lokalnem koordinatnem sistemu (ξ, η). Z njima lahko nato izračunamo vrednost kateregakoli polja v točki (x, y), če ga le poznamo v vozliščih. Če vstavimo interpolacijske funkcije (A4.5) v enačbi (A7.1) in iz obeh izrazimo η, dobimo:

$$\eta = \frac{\{4x - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\} + \xi\,\{x_1 - x_2 - x_3 + x_4\}}{\{x_4 - x_1 + x_3 - x_2\} + \xi\,\{x_1 - x_4 + x_3 - x_2\}} = \frac{A + B\xi}{C + D\xi}, \tag{A7.2}$$

$$\eta = \frac{\{4y - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\} + \xi\,\{y_1 - y_2 - y_3 + y_4\}}{\{y_4 - y_1 + y_3 - y_2\} + \xi\,\{y_1 - y_4 + y_3 - y_2\}} = \frac{E + F\xi}{G + H\xi}, \tag{A7.3}$$

kjer smo z velikimi črkami označili linearne kombinacije koordinat vozlišč. Iz enačb (A7.2) in (A7.3) izrazimo ξ. Dobimo kvadratno enačbo

$$(BH - FD)\xi^2 + (AH + BG - ED - FC)\xi + (AG - EC) = 0. \tag{A7.4}$$

Če je diskriminanta kvadratne enačbe negativna oziroma je enačba trivialna, je element nepravilen. Če obe rešitvi za ξ ležita izven intervala $[-1 \ldots 1]$, točka (x, y) ne leži v elementu. Če pa vsaj ena rešitev leži v intervalu, jo uporabimo za izračun η iz enačbe (A7.2) ali (A7.3). Rešitev zgornje kvadratne enačbe nam poda torej odgovora na dva vprašanja. Če je rešitev imaginarna, je mreža nepravilna, če je rešitev izven območja pa točke ni v elementu.

Algoritem za sledenje brez masnim delcem v toku je naslednji:

- Izberemo začetni položaj delca v toku in začetno tokovno polje.
- Z zanko potujemo skozi vse elemente v mreži, dokler na podlagi rešitve kvadratne enačbe (A7.4) ne ugotovimo, v katerem elementu mreže se nahaja delec.
- S pomočjo lokalnih koordinat ξ, η, ki sta rešitev kvadratne enačbe, izračunamo hitrost na mestu delca.
- Časovni korak med tokovnimi polji razdelimo na 100 delov. S pomočjo enačbe enakomernega gibanja $s = vt$ izračunamo novo lokacijo delca. Nato na novi lokaciji ponovno z interpolacijo izračunamo hitrost.
- Postopek ponavljamo; ko s časom pridemo do novega hitrostnega polja, ga uporabimo.

A8 Turbulentno Reynoldsovo število Re_τ

Obravnavamo turbulentni tok v kanalu. Višina kanala naj bo L in $v = v_x$ komponenta hitrosti vzdolž kanala. Definiramo *bulk velocity* v_0, to je povprečno hitrost, ki jo definira pretok skozi kanal:

$$v_0 = \frac{\int_0^L v(y)dy}{\int_0^L dy} = \frac{1}{L}\int_0^L v(y)dy. \tag{A8.1}$$

Reynoldsovo število na podlagi povprečne hitrosti definiramo z

$$Re = \frac{v_0 L}{\nu}, \tag{A8.2}$$

kjer je ν viskoznost. Druga možnost definicije Reynoldsovega števila je na podlagi hitrosti v sredini kanala $v_{1/2}$:

$$Re_{1/2} = \frac{v_{1/2}L}{\nu}. \tag{A8.3}$$

Turbulentno Reynoldsovo število Re_τ je definirano takole:

$$Re_\tau = \frac{v_\tau \frac{1}{2}L}{\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ReL|\omega|}{v_0}}, \tag{A8.4}$$

kjer je v_τ strižna hitrost definirana kot kvadratni koren strižne napetosti ob steni τ_s:

$$v_\tau = \sqrt{\tau_s}. \tag{A8.5}$$

Strižna napetost na steni (v 2D in pri steni v smeri x) je

$$\tau_s = \nu\frac{\partial v_x(y)}{\partial y} = \nu|\omega|, \tag{A8.6}$$

kjer je ω vrtinčnost na steni. Ker je na steni hitrost nič, je v definiciji vrtinčnosti $\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ odvod $\frac{\partial v_y}{\partial x} \equiv 0$ identično enak nič. Torej je vrtinčnost na steni:

$$\omega = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{A8.7}$$

Viskozno dolžinsko skalo L_τ definiramo z

$$L_\tau = \frac{\nu}{v_\tau}. \tag{A8.8}$$

Zidni koordinatni sistem (x^+, y^+, z^+) definiramo s pomočjo viskozne dolžinske skale

$$y^+ = \frac{y}{L_\tau} = \frac{y v_\tau}{\nu} = Re_\tau \frac{y}{\frac{1}{2}L}. \tag{A8.9}$$

Zidne hitrosti (x^+, y^+, z^+) definiramo s pomočjo strižne hitrosti na steni

$$\vec{v}^+ = \frac{\vec{v}}{v_\tau}. \tag{A8.10}$$

A9 Haarovi valčki

Oglejmo si družino Haarovih[4] valčkov (Haar [47]), s katerimi smo vpeljali diskretno valčno transformacijo za vektorje poljubnih dolžin. Haarov merilni valček je konstantna funkcija na intervalu $[0, 1]$:

$$\phi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sicer \end{cases} . \tag{A9.1}$$

Haarov materinski valček pa je med nič in 1/2 enak ena, med 1/2 in 1 pa minus ena:

$$\psi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & sicer \end{cases} . \tag{A9.2}$$

Iz njega s pomikanjem in krčenjem izpeljani Haarovi valčki višjih redov pa so

$$\psi_{k,l}(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & 2^{-k}(l-1) \leq x \leq 2^{-k}(l-1/2) \\ -2^{k/2} & 2^{-k}(l-1/2) \leq x \leq 2^{-k}l \\ 0 & sicer \end{cases} \quad \begin{array}{c} 0 \leq k \leq \infty \\ 1 \leq l \leq 2^k \end{array} , \tag{A9.3}$$

kjer je k red valčka, l pa njegov pomik. Tako k kot l sta celi števili. Iz definicije vidimo, da red valčka k lahko zavzame vrednosti med nič in neskončno, medtem ko valček lahko pomikamo samo med 0 in 1. Zato l lahko zavzame vrednosti med 1 in 2^k. Haarovi valčki so ortonormalne bazne funkcije za prostor $L^2(0, 1)$.

Na sliki A9.1 prikazujemo Haarov merilni valček in valčke prvih štirih redov. Vidimo, da vse valčke dobimo z ožanjem (povečevanjem k) in premikanjem (spreminjanje l) prototipnega valčka $\psi_{0,1}$.

A9.1 Diskretna valčna transformacija s Haarovimi valčki

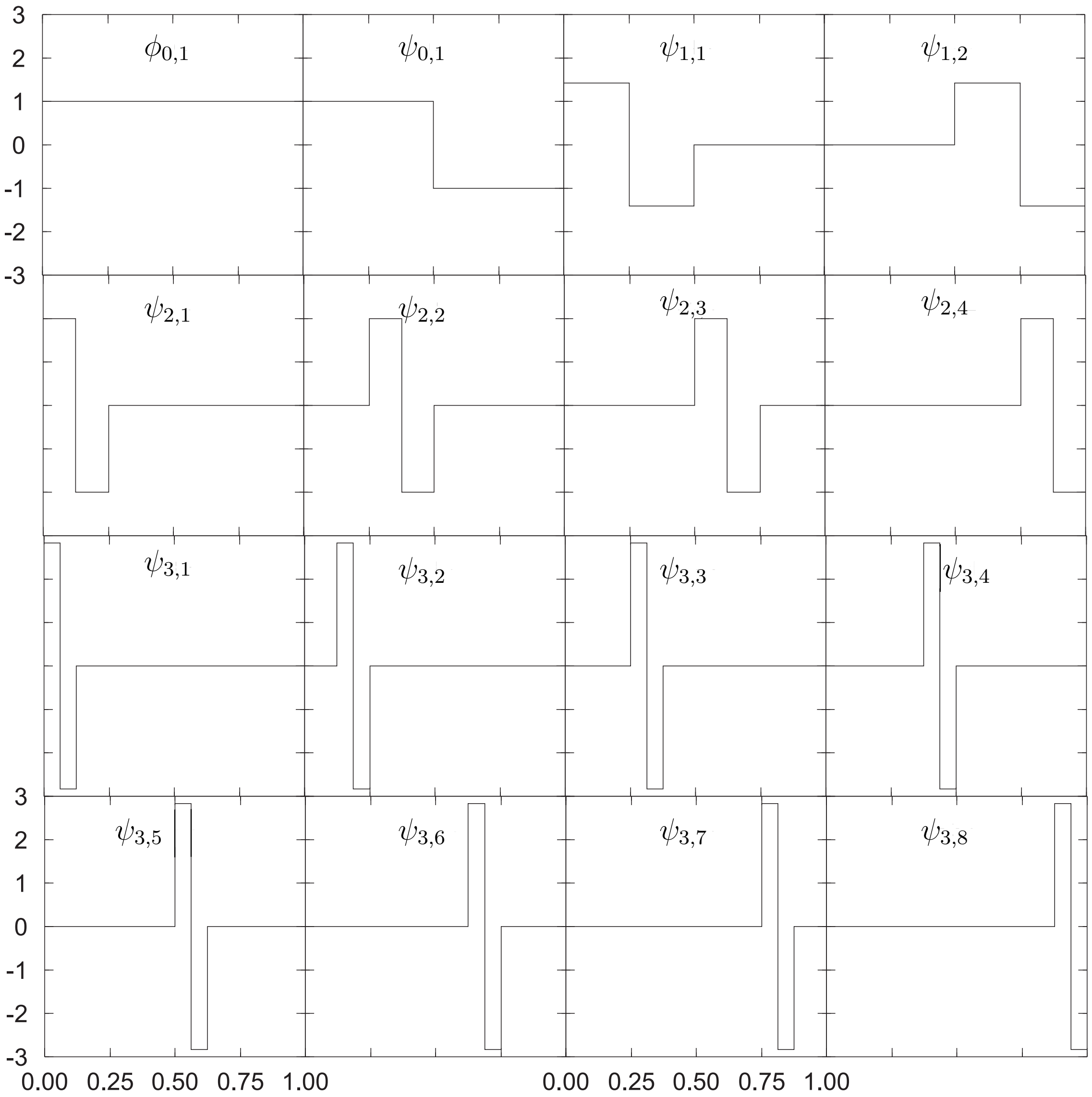
Zapišimo diskretno valčno transformacijo s Haarovimi valčki. Vsako v kvadratu integrabilno funkcijo $f(x) \in L^2(0, 1)$ lahko zapišemo (Koro in Abe [63]) z valčnimi baznimi funkcijami:

$$f(x) = c_{0,1}\phi_{0,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^k} d_{k,l}\psi_{k,l}(x) \qquad c_{0,1} = \langle f, \phi_{0,1} \rangle, \quad d_{k,l} = \langle f, \psi_{k,l} \rangle. \tag{A9.4}$$

Tu so $c_{0,1}$ in $d_{k,l}$ koeficienti valčne transformacije, oklepaja $\langle , \rangle$ pa označujeta notranji produkt. Notranji produkt za zvezen primer zapišemo

$$\begin{aligned} d_{k,l} = \langle f, \psi_{k,l} \rangle &= \int_0^1 f(x)\psi_{k,l}dx. \\ c_{k,l} = \langle f, \phi_{0,1} \rangle &= \int_0^1 f(x)\phi_{0,1}dx. \end{aligned} \tag{A9.5}$$

[4] Alfréd Haar (1885–1933), madžarski matematik



Slika A9.1: Haarov merilni valček $\phi_{0,1}$, valček prototip $\psi_{0,1}$ in valčki redov od $k = 1$ do $k = 3$. Število vseh valčkov do reda k je 2^{k+1}. Na sliki je prikazana družina valčkov do tretjega reda, zato $2^{3+1} = 16$.

V kolikor je funkcija $f(x)$ diskretna, jo predstavimo z vektorjem. Mislimo si, da je vseh n komponent f_i vektorja $\vec{f}$ razporejenih po osi x med 0 in 1 z medsebojnimi razdaljami 1/n. Ker je število podatkov v vektorju, ki ga transformiramo, končno, ni potrebe, da gre vsota po k v enačbi (A9.4) do neskončnosti. Potrebujemo samo tako velik red valčkov k_m, da bo skupno število vseh valčkov do vključno reda k_m večje kot je število podatkov; to je števila komponent vektorja, ki ga transformiramo. Preprost račun pokaže, da je število vseh valčnih koeficientov $d_{k,l}$ za $k \in [0, k_m]$ in $c_{0,1}$, torej število vseh valčkov do reda k_m, enako 2^{k_m+1}. Najugodneje torej je, če imamo v vektorju, ki ga transformiramo, 2^{k_m+1} podatkov. Tak vektor bomo linearno valčno transformirali v vektor z enakim številom koeficientov $d_{k,l}$ in $c_{0,1}$. V tem primeru lahko integral v notranjem produktu (A9.5) nadomestimo z vsoto:

$$\begin{aligned} d_{k,l} &= \frac{1}{\sqrt{2^{k_m+1}}} \sum_{i=1}^{2^{k_m+1}} f_i \psi_{k,l}\left(\frac{i}{2^{k_m+1}}\right), \\ c_{0,1} &= \frac{1}{\sqrt{2^{k_m+1}}} \sum_{i=1}^{2^{k_m+1}} f_i \phi_{0,1}\left(\frac{i}{2^{k_m+1}}\right). \end{aligned} \tag{A9.6}$$

Diskretna valčna transformacija transformira vektor $\vec{f}$ v vektor koeficientov $\hat{f}$. Transformacija je linearna

$$\vec{f} \rightarrow \hat{f} = \left| \begin{array}{c} c_{0,1} \\ d_{0,1} \\ \vdots \\ d_{k_m,2^{k_m}} \end{array} \right|, \tag{A9.7}$$

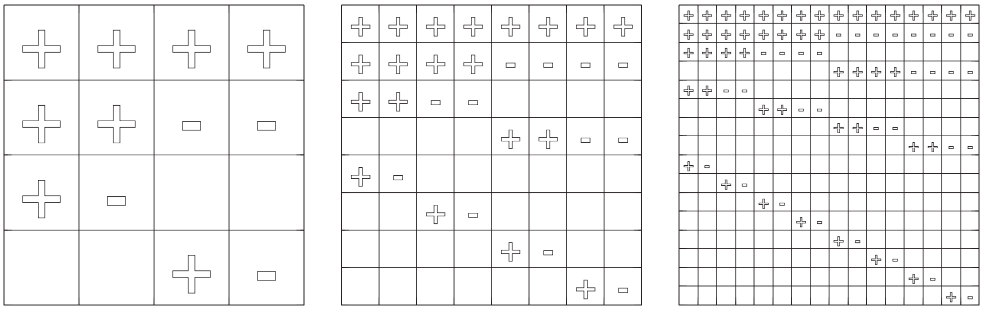
zato jo lahko zapišemo z matriko W. Operacija valčne transformacije vektorja $\vec{f}$ v $\hat{f}$ se v vektorski obliki zapiše

$$W\vec{f} = \hat{f}. \tag{A9.8}$$

Vektorja $\vec{f}$ in $\hat{f}$ imata 2^{k_m+1} členov, matrika W pa ima dimenzije $(2^{k_m+1}, 2^{k_m+1})$. Členi matrike so enaki

$$\begin{aligned} W_{1,i} &= \frac{1}{\sqrt{2^{k_m+1}}} \phi_{0,1}\left(\frac{i}{2^{k_m+1}}\right), \\ W_{j,i} &= \frac{1}{\sqrt{2^{k_m+1}}} \psi_{k,l}\left(\frac{i}{2^{k_m+1}}\right), \\ j &= 2^k + l, 0 \leq k \leq k_m, 1 \leq l \leq 2^k. \end{aligned} \tag{A9.9}$$

Prva in druga vrsta matrike sta polni, to je v celoti različni od nič, zato ker sta valčka $\phi_{o,1}$ in $\psi_{o,1}$ na celotnem območju različna od nič (glej sliko A9.1). Pri valčkih reda $k = 1$ (vrstici 3 in 4) je polovico členov v matriki enako nič, pri $k = 2$ pa je tri četrtine členov enakih nič. Na sliki A9.2 so prikazani členi v matriki W, ki so pozitivni, negativni oziroma enaki nič. Če v enačbi (A9.9) upoštevamo definicijo Haarovih valčkov (A9.3), potem za



(a) (b) (c)

Slika A9.2: Matrike W za (a) $k_m = 1$, (b) $k_m = 2$ in (c) $k_m = 3$. Z znakoma + oziroma - so označeni pozitivni in negativni členi v matriki, prazen prostor pa označuje člene enake nič.

matrike W na sliki A9.2 velja

$$W = \begin{cases} 2^{\frac{k-k_m-1}{2}} & + \\ -2^{\frac{k-k_m-1}{2}} & - \\ 0 & sicer \end{cases} \tag{A9.10}$$

Vidimo, da so absolutne vrednosti členov v matriki W odvisne samo od reda valčka k. Število od nič različnih členov v matriki je $(k_m + 2) \cdot 2^{k_m+1}$, število ničel pa $(2^{k_m+1} - k_m - 2) \cdot 2^{k_m+1}$. Razmerje med številom ničel in številom neničelnih elementov v matriki preseže 0.96 pri $k_m = 7$ in 0.99 pri $k_m = 9$.

Omeniti velja še dve lastnosti matrike valčne transformacije. Matrika je ortonormirana, tako da velja

$$W^T W = \underline{I}. \tag{A9.11}$$

Matrika identiteta $\underline{I}$ ima na diagonali enke, vsi ostali členi pa so nič, W^T pa je transponirana matrika W.

Z enačbo (A9.8) smo valčno transformirali vektor $\vec{f}$ v valčno transformiran vektor $\hat{f}$. Obratno transformacijo dosežemo, če s transponirano matriko delujemo na valčno transformirani vektor

$$W^T \hat{f} = \vec{f}. \tag{A9.12}$$

Enačbo (A9.12) zlahka izpeljemo, če na obe strani enačbe A9.8 delujemo z W^T in upoštevamo ortonormiranost matrike valčne transformacije (enačba A9.11).

A10 Fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe

Rešitev diferencialne enačbe na neomejenem območju za enotski točkovni izvir imenujemo fundamentalna rešitev enačbe. Postavimo enotski točkovni izvir v izvorno točko $\vec{\xi}$. Matematično izvor opišemo z Diracovo[5] delta funkcijo $\Delta(\vec{\xi},\vec{r})$, za katero velja:

$$\Delta(\vec{\xi},\vec{r}) = 0; \qquad \vec{\xi} \neq \vec{r} \tag{A10.1}$$

$$\int_{\Omega} u^{\star}(\vec{r})\Delta(\vec{\xi},\vec{r})d\Omega = u^{\star}(\vec{\xi}). \tag{A10.2}$$

Zapišimo Laplaceovo[6] enačbo za fundamentalno rešitev $u^{\star}(\vec{\xi},\vec{r})$:

$$\nabla^2 u^{\star}(\vec{\xi},\vec{r}) + \Delta(\vec{\xi},\vec{r}) = 0; \qquad \vec{\xi},\vec{r} \in \Omega^{\infty}, \tag{A10.3}$$

kjer je Ω^{∞} celoten prostor v treh dimenzijah oziroma celotna ravnina v dveh. Fundamentalna rešitev $u^{\star}(\vec{\xi},\vec{r})$ v točki $\vec{r}$ je odvisna od položaja enotskega izvora, t.j. izvorne točke $\vec{\xi}$. Za homogen in izotropen medij bo zaradi simetrije fundamentalna rešitev odvisna samo od razdalje r od mesta opazovanja $\vec{r}$ do izvorne točke $\vec{\xi}$; $r = |\vec{\xi} - \vec{r}|$.

Najprej poiščimo partikularno rešitev enačbe (A10.3). Enačbo prepišemo v koordinatnem sistemu z izhodiščem v $\vec{\xi}$ v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča r:

$$\nabla^2 u^{\star}(r) = 0. \tag{A10.4}$$

Zapišemo ∇^2 v krogelnih koordinatah in upoštevamo, da je rešitev krogelno simetrična. Rešitev partikularne enačbe je

$$\frac{d^2 u^{\star}(r)}{dr^2} + \frac{\alpha}{r}\frac{du^{\star}(r)}{dr} = 0, \tag{A10.5}$$

kjer je

$$u^{\star}(r) = \frac{K}{r}; \qquad (3D), \tag{A10.6}$$

$$u^{\star}(r) = K \ln\frac{1}{r}; \qquad (2D). \tag{A10.7}$$

Obe rešitvi (A10.6) in (A10.7) bi lahko imeli prišteto poljubno konstanto. Konstanti smo postavili na nič, ker predstavljata smo zvezen premik rešitve, kar pa za nas nima pomena. Konstanta α v enačbi (A10.5) je $\alpha = 1$ v 2D in $\alpha = 2$ v 3D.

Pri določanju konstant K si pomagamo z lastnostmi Diracove funkcije. Zamislimo si majhno območje Ω_ϵ okoli izvorne točke $\vec{\xi}$. Integrirajmo enačbo (A10.3) po tem območju:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 u^{\star}(\vec{\xi},\vec{r})d\Omega_\epsilon = -\int_{\Omega_\epsilon} \Delta(\vec{\xi},\vec{r})d\Omega_\epsilon = -1; \qquad \vec{\xi},\vec{r} \in \Omega_\epsilon. \tag{A10.8}$$

[5] Paul Adrien Maurice Dirac, (1902–1984), britanski teoretični fizik
[6] Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749–1827), francoski matematik in astronom

Pri vrednotenju integrala na desni smo upoštevali lastnost Diracove funkcije (A10.2). Uporabimo Gaussov stavek (A2.1) na integralu na levi (A10.8). V (A2.1) postavimo $\vec{F} = \vec{\nabla} u^\star$ in dobimo

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) d\Omega_\epsilon = \int_{\Gamma_\epsilon} \vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) \cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon = -1; \qquad \vec{\xi}, \vec{r} \in \Omega_\epsilon, \tag{A10.9}$$

Integral po robu območja Γ_ϵ je v 3D integral po sferi oddaljeni ϵ od izvorne točke $\vec{\xi}$, oziroma krog s polmerom ϵ okrog $\vec{\xi}$ v 2D. Ker sta partikularni rešitvi (A10.6) in (A10.7) odvisni samo od oddaljenosti od izvorne točke, sta tudi njuna gradienta odvisna samo od oddaljenosti, zato lahko $\vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) \cdot \vec{n} = \nabla u^\star(r)$ izvzamemo iz integrala in ga ovrednotimo pri $r = \epsilon$:

$$\left. \frac{\partial u^\star(r)}{\partial r} \right|_{r=\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma_\epsilon = -1, \tag{A10.10}$$

kjer smo uporabili radialni del operatorja ∇ v krogelnih koordinatah $\nabla = \partial/\partial r$. Integral $\int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma_\epsilon = 4\pi\epsilon^2$ je v 3D površina krogle s polmerom ϵ in obseg kroga $2\pi\epsilon$ v 2D. V enačbo (A10.10) vstavimo partikularni rešitvi (A10.6) in (A10.7) in dobimo konstanti K za oba primera. Končen izraz za fundamentalno rešitev Laplaceove enačbe je

$$u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}; \qquad (3D), \tag{A10.11}$$

$$u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}; \qquad (2D), \tag{A10.12}$$

kjer je r razdalja od mesta opazovanja $\vec{r}$ do izvorne točke $\vec{\xi}$; $r = |\vec{\xi} - \vec{r}|$.

A11 Integralski zapis Poissonove enačbe za metodo robnih elementov

S Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = b(\vec{r}); \qquad \vec{r} \in \Omega \tag{A11.1}$$

lahko opisujemo številne fizikalne probleme v različnih panogah. Tako prenos toplote, tok podzemne vode, elektrostatske probleme kot tudi nevrtinčen tok nestisljive tekočine. V hitrostno-vrtinčnem zapisu simulacije velikih vrtincev je filtrirana enačba kinematike (2.69), ki povezuje hitrostno in vrtinčno polje, Poissonove oblike. Na desni strani Poissonove enačbe (A11.1) so prostorninsko porazdeljene sile $b(\vec{r})$.

Z uporabo metode robnih elementov lahko Poissonovo enačbo (A11.1) učinkovito numerično rešujemo, če jo prevedemo iz diferencialne oblike v integralsko.

Naj bo $u(\vec{r})$ skalarno polje definirano na območju Ω z robom Γ. Na robu Γ definirajmo enotsko normalo $\vec{n}$, ki naj kaže ven iz območja Ω in ima dolžino ena. Diferencialni delček robu $d\vec{\Gamma}$ ima smer enako kot normala. Potencial $u(\vec{r})$ naj zadošča Poissonovi parcialni diferencialni enačbi (A11.1). Robni pogoji, ki jih potrebujemo za rešitev parcialne diferencialne enačbe, so glede na red operatorja v enačbi lahko:

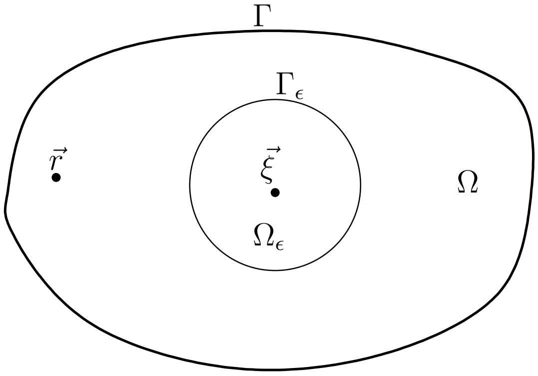
- predpis potenciala $u(\vec{r}) = \bar{u}(\vec{r}); \qquad \vec{r} \in \Gamma \qquad$ ali
- predpis odvoda v smeri normale $\vec{\nabla} u(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \bar{q}(\vec{r}); \qquad \vec{r} \in \Gamma$.

Poissonovo enačbo (A11.1) bomo zapisali v integralski obliki. Začnemo z Greenovim drugim stavkom (A2.5), ki smo ga izpeljali v prilogi A2 na strani 112. Na območju Ω z robom Γ imamo skalarni polji $u(\vec{r})$ in $u^\star(\vec{\xi}, \vec{r})$. Izberemo naj bo $u^\star(\vec{\xi}, \vec{r})$ fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe, ki je opisana v prilogi A10 na strani 126. Enotski izvor, na podlagi katerega izračunamo fundamentalno rešitev, smo postavili v izvorno točko $\vec{\xi}$, ki je v območju $\vec{\xi} \in \Omega$. Skalarno polje $u(\vec{r})$ pa naj v območju Ω zadošča Poissonovi enačbi (A11.1) z ustreznimi robnimi pogoji. Za ta dva skalarna polja se Greenov drugi stavek (A2.5) zapiše

$$\begin{aligned}\int_{\Omega-\Omega_\epsilon} \left[u(\vec{r}) \nabla^2 u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) - u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) \nabla^2 u(\vec{r}) \right] d\Omega = \\ \int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \left[u(\vec{r}) \vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) - u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) \vec{\nabla} u(\vec{r}) \right] \cdot d\vec{\Gamma}; \\ \vec{r}, \vec{\xi} \in \Omega.\end{aligned} \tag{A11.2}$$

Skalarno polje $u^\star(\vec{\xi}, \vec{r})$ je v izvorni točki singularno, zato smo integracijo singularnega integrala zapisali tako, da smo singularnost obkrožili z majhnim območjem Ω_ϵ z robom Γ_ϵ (slika A11.1). Z upoštevanjem singularnosti integralov prepišemo drugi Greenov stavek (A11.2) tako, da pošljemo območje Ω_ϵ v limiti proti nič:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega-\Omega_\epsilon} u(\vec{r}) \nabla^2 u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) d\Omega - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega-\Omega_\epsilon} u^\star(\vec{\xi}, \vec{r}) \nabla^2 u(\vec{r}) d\Omega$$



Slika A11.1: Območje integracije z izolirano singularno izvorno točko $\vec{\xi}$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Gamma \left[u(\vec{r})\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) - u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\vec{\nabla}u(\vec{r})\right]\cdot d\vec{\Gamma} \\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon}\left[u(\vec{r})\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) - u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\vec{\nabla}u(\vec{r})\right]\cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon; \\
&\qquad \vec{r}\in\Omega-\Omega_\epsilon, \vec{\xi}\in\Omega. \qquad \text{(A11.3)}
\end{aligned}
$$

Prvi območni integral na levi strani enačbe (A11.3) je nič, ker območje integracije ne vsebuje izvorne točke $\vec{\xi}$. Laplacev operator na fundamentalno rešitev je za celotno območje, ki ne vsebuje izvorne točke, enak nič (enačba (A10.1) v prilogi A10). Drugi območni integral na levi strani enačbe (A11.3) prepišemo z uporabo Poissonove enačbe (A11.1) v

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega-\Omega_\epsilon} u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\nabla^2 u(\vec{r})d\Omega &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega-\Omega_\epsilon} u^\star(\vec{\xi},\vec{r})b(\vec{r})d\Omega \\
&= \int_\Omega u^\star(\vec{\xi},\vec{r})b(\vec{r})d\Omega. \qquad \text{(A11.4)}
\end{aligned}
$$

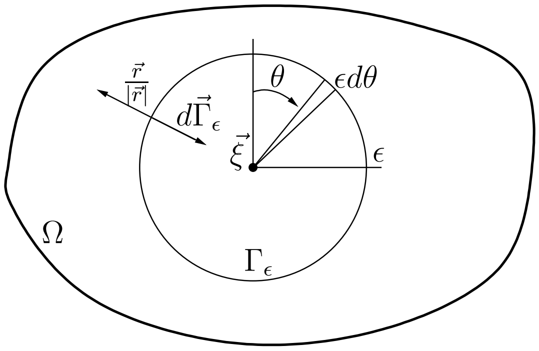
Zadnja enakost drži zaradi reda singularnosti polja $u^\star(\vec{\xi},\vec{r})$ ($\ln r$ v 2D in $1/r$ v 3D), ki dovoljuje izračun *nepravega* integrala.

Prvi del drugega integrala na desni strani enačbe (A11.3) prepišemo tako, da prištejemo in odštejemo $u(\vec{\xi})$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} u(\vec{r})\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\cdot d\Gamma_\epsilon = \\
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon}[u(\vec{r})-u(\vec{\xi})]\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon + \lim_{\epsilon\to 0}u(\vec{\xi})\int_{\Gamma_\epsilon}\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon. \qquad \text{(A11.5)}
\end{aligned}
$$

Oglejmo si najprej drugi integral na desni strani enačbe (A11.5). Ovrednotili ga bomo za 2D primer. Fundamentalna rešitev je v dveh dimenzijah $u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi}\ln r$ (enačba (A10.12) v prilogi A10). Vektor $d\vec{\Gamma}_\epsilon$ kaže iz območja (torej v krog s polmerom ϵ). Njegova velikost se v polarnem koordinatnem sistemu zapiše $d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\theta$, kjer pri integraciji θ teče med 0 in 2π. Izrazimo

$$
\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln r\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon = \frac{-1}{2\pi\epsilon}\epsilon d\theta(-1) = \frac{d\theta}{2\pi}, \qquad \text{(A11.6)}
$$



Slika A11.2: Iz integracije izvzeto območje Γ_ϵ. Vektorja $\vec{r}/|\vec{r}|$ in $d\vec{\Gamma}$ kažeta v nasprotnih smereh, zato je njun skalarni produkt negativen.

kjer smo $\vec{\nabla}$ zapisali v polarnem koordinatnem sistemu samo za r, saj fundamentalna rešitev (A10.12) ni odvisna od kota θ. Skalarni produkt $\vec{r}/|\vec{r}| \cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon$ je enak $-\epsilon d\theta$, zato ker $\vec{r}/|\vec{r}|$ kaže ven iz kroga, $d\vec{\Gamma}_\epsilon$ pa noter. Izvajanje (A11.6) vstavimo v drugi integral na desni strani enačbe (A11.5) in dobimo

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(\vec{\xi}) \int_{\Gamma_\epsilon} \vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} u(\vec{\xi}) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = u(\vec{\xi}). \tag{A11.7}$$

V treh dimenzijah je izračun analogen, rezultat pa enak.

Ko izvedemo limito, je prvi integral na desni (A11.5) enak nič. S potiskanjem $\epsilon \to 0$ premikamo tudi $\vec{r} \to \vec{\xi}$ oziroma $u(\vec{r}) \to u(\vec{\xi})$, zato je razlika $u(\vec{r}) - u(\vec{\xi})$ v limiti enaka nič. Povzemimo; prvi del drugega integrala na desni (A11.3) je enak:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(\vec{r}) \vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \cdot d\Gamma_\epsilon = u(\vec{\xi}). \tag{A11.8}$$

Poglejmo si še drugi del drugega integrala na desni (A11.3). Uporabimo Gaussov stavek (A2.1) in

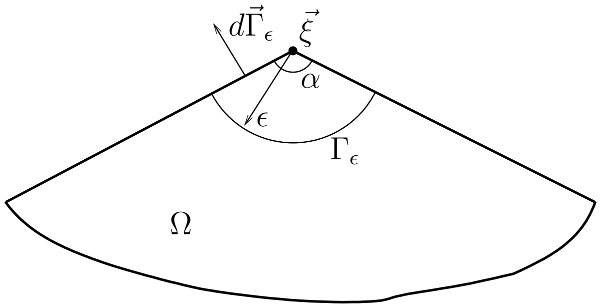
$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \vec{\nabla} u(\vec{r}) \cdot d\vec{\Gamma}_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\epsilon} u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \nabla^2 u(\vec{r}) \cdot d\Omega_\epsilon = 0. \tag{A11.9}$$

Integral je enak nič, ker je $\nabla^2 u(\vec{r}) = 0$. Končno v enačbo (A11.3) vstavimo enačbe (A11.9), (A11.8) in (A11.4) in izpišemo integralsko enačbo za izračun polja u v izvorni točki $\vec{\xi}$:

$$u(\vec{\xi}) = \int_\Gamma \left[u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \vec{\nabla} u(\vec{r}) - u(\vec{r}) \vec{\nabla} u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) \right] \cdot d\vec{\Gamma} - \int_\Omega u^\star(\vec{\xi},\vec{r}) b(\vec{r}) d\Omega \qquad \vec{\xi} \in \Omega. \tag{A11.10}$$

Polje v izvorni točki $u(\vec{\xi})$, ki je znotraj območja, torej lahko izračunamo z integracijo u in $\vec{\nabla} u$ po robu območja ter z integracijo prostorninskih sil $b(\vec{r})$ po območju. Z robnimi pogoji poznamo del u in $\vec{\nabla} u$ na delu robu, vendar ne na celotnem robu. Potrebujemo enačbo podobno enačbi (A11.10), ki bo povezovala potencial na robu z integralom po robu.

Izpeljavo nadaljujemo tako, da izvorno točko $\vec{\xi}$ pomaknemo na rob območja. Zopet je potrebno izvorno točko izvzeti iz integracije. Na sliki A11.3 je prikazano, kako izvzamemo



Slika A11.3: Območje integracije z izolirano singularno izvorno točko $\vec{\xi}$ na robu.

izvorno točko v dveh dimenzijah. Če je rob raven, izvzamemo izvorno točko s polkrogom. Preoblikovanje enačbe (A11.3) na rob poteka enako kot zgoraj, le meja integracije v integralu (A11.7) se spremeni glede na lokalno geometrijo v neposredni okolici izvorne točke. Definirajmo prosti koeficient $c(\vec{\xi})$ takole

$$c(\vec{\xi}) = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}, \tag{A11.11}$$

kjer je α notranji kot z vrhom v izvorni točki $\vec{\xi}$. Ne glede na lokalno geometrijo okoli izvorne točke lahko vedno postavimo koordinatni sistem za integracijo v enačbi (A11.7) tako, da je spodnja meja 0. Koeficient $c(\vec{\xi}) = 1$, če je izvorna točka v notranjosti območja Ω; $c(\vec{\xi}) = 1/2$, če je $\vec{\xi}$ na gladkem robu. Z uporabo enačbe (A11.11) zapišemo integralsko enačbo za izračun polja u v izvorni točki $\vec{\xi}$ na robu

$$c(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) = \int_\Gamma \left[u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\vec{\nabla}u(\vec{r}) - u(\vec{r})\vec{\nabla}u^\star(\vec{\xi},\vec{r})\right]\cdot d\vec{\Gamma} - \int_\Omega u^\star(\vec{\xi},\vec{r})b(\vec{r})d\Omega \qquad \vec{\xi} \in \Gamma. \tag{A11.12}$$

Enačba (A11.12) pravi, da je polje v točki na robu $u(\vec{\xi})$ odvisno samo od polja $u(\vec{r})$ in odvoda $\vec{\nabla}u(\vec{r})$ na celotnem robu območja ter od prostorninskih sil v območju. Rešimo jo lahko z uporabo robnih pogojev za vsako točko roba. Ko poznamo polje $u(\vec{r})$ in odvod $\vec{\nabla}u(\vec{r})$ na celotnem robu, lahko z uporabo enačbe (A11.10) izračunamo polje u za katerokoli točko v notranjosti območja.

A12 Rešitev skalarne Poissonove enačbe z metodo končnih elementov

Poissonova enačba se za poljubno skalarno funkcijo polja (komponento hitrosti, tokovno funkcijo, tlak,..) zapiše

$$\nabla^2 u = b, \tag{A12.1}$$

kjer je u skalarna funkcija in b prostorninsko porazdeljene sile na desni strani. V metodi končnih elementov enačbo (A12.1) rešujemo tako, da vpeljemo uteženi ostanek

$$\int_\Omega \left(\nabla^2 u - b\right) \varpi d\Omega = 0, \tag{A12.2}$$

kjer je ϖ utežna funkcija. Če je u točna rešitev po celotnem območju, je razlika $\nabla^2 u - b$ enaka nič in enačbi (A12.2) je zadoščeno. V realnih inženirskih problemih točnih rešitev ne poznamo, zato poskušamo doseči, da bo napaka rešitve enakomerno porazdeljena po celotnem območju. Utežno funkcijo izberemo tako, da je ostanek pravokoten na prostor funkcij, ki jih uporabimo za približek rešitve.

Območje razdelimo na elemente;

$$\Omega \approx \sum_{e=1}^{n_e} \Omega_e, \tag{A12.3}$$

kjer je število elementov enako n_e. Integracijsko območje v integralu (A12.2) razdelimo na elemente in ga zapišemo kot vsoto:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\nabla^2 u) \varpi d\Omega_e = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} b \varpi d\Omega_e. \tag{A12.4}$$

Utežna funkcija je od nič različna samo znotraj izbranega elementa. Torej, za element e mora veljati:

$$\int_{\Omega_e} (\nabla^2 u) \varpi d\Omega_e = \int_{\Omega_e} b \varpi d\Omega_e. \tag{A12.5}$$

Znotraj elementov funkcije polja aproksimiramo z interpolacijskimi funkcijami N_l (glej prilogo A4 na strani 114 za opis oblik elementov in interpolacijskih funkcij). Znotraj elementa e velja

$$u^e = \sum_{l=1}^{n_l} N_l u_l^e, \qquad b^e = \sum_{l=1}^{n_l} N_l b_l^e, \tag{A12.6}$$

kjer je n_l število interpolacijskih funkcij in število znanih vrednosti polj v vozliščih. Z aproksimacijo polj v elementih lahko enačbo (A12.5) preoblikujemo

$$\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} (\nabla^2 N_l) \varpi d\Omega_e = \sum_{l=1}^{n_l} b_l^e \int_{\Omega_e} N_l \varpi d\Omega_e. \tag{A12.7}$$

Po Garlekinu[7] izberemo za utežno funkcijo kar interpolacijske funkcije $\varpi = N_k$. To zagotovi, da je ostanek ortogonalen na interpolacijske funkcije in zato se napaka z zgoščevanjem elementov monotono manjša (Gresho, [45]). Indeks k se nanaša na eno izmed interpolacijskih funkcij v elementu e. Privzeli smo, da so vsi elementi v računski mreži enakega tipa z enakimi interpolacijskimi funkcijami. V primeru različnih tipov elementov bi bile interpolacijske funkcije odvisne tudi od elementa (N_k^e). Ko vstavimo interpolacijsko funkcijo namesto uteži v enačbo (A12.7), dobimo

$$\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} (\nabla^2 N_l) N_k d\Omega_e = \sum_{l=1}^{n_l} b_l^e \int_{\Omega_e} N_l N_k d\Omega_e. \tag{A12.8}$$

Integral na levi strani zgornje enačbe (A12.8) vsebuje drugi red odvodov. Red zmanjšamo s pomočjo prvega Greenovega stavka (A2.4):

$$\int_{\Omega_e} (\nabla^2 N_l) N_k d\Omega_e = -\int_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_k \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} N_k \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e. \tag{A12.9}$$

Robni integral na desni strani enačbe (A12.9) se računa po robu vsakega elementa posebej. Na delih robov, ki jih elementi delijo med seboj, je robni integral do predznaka enak za sosednja elementa. Predznak je različen zaradi nasprotno obrnjenih normal. To lastnost bomo izkoristili pri postavitvi sistema enačb tako, da se bodo robni integrali po notranjih robovih elementov medsebojno odšteli. Robne integrale po zunanjih robovih elementov pa ovrednotimo s pomočjo robnih pogojev. Robni integral po zunanjem robu fizikalno predstavlja pretok veličine u skozi rob. V primerih sten, razvitega profila in adiabatne stene predpišemo na robu pretok nič, zato robnega integrala ni potrebno izračunati. Greenov stavek (A12.9) vstavimo v enačbo (A12.8):

$$-\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_k \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Gamma_e} N_k \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e = \sum_{l=1}^{n_l} b_l^e \int_{\Omega_e} N_l N_k d\Omega_e. \tag{A12.10}$$

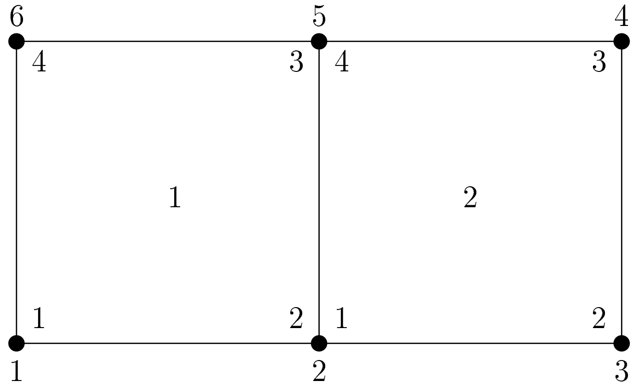
Integrale poimenujemo

$$D_{k,l}^e = \int_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_k \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e, \qquad R_{k,l}^e = \int_{\Gamma_e} N_k \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e, \qquad M_{k,l}^e = \int_{\Omega_e} N_l N_k d\Omega_e. \tag{A12.11}$$

Vidimo, da so integrali odvisni samo od interpolacijskih funkcij in oblik elementov. Obliko in tipe elementov določa računska mreža, zato lahko integrale izračunamo samo enkrat, jih shranimo v matrike in Poissonovo enačbo rešimo poljubnokrat v nelinearnem iterativnem postopku, ki sledi. Z novimi oznakami za integrale se enačba za element e zapiše

$$-\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e D_{k,l}^e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e R_{k,l}^e = \sum_{l=1}^{n_l} b_l^e M_{k,l}^e. \tag{A12.12}$$

Zgornjo enačbo imamo za vsak element $e = 1, \ldots, n_e$ in za vsako interpolacijsko funkcijo znotraj elementa $k = 1, \ldots, n_l$. Ker si elementi vozlišča delijo med seboj, je število enačb $n_e \cdot n_l$ večje od števila vozlišč. Določen sistem enačb dobimo, ko seštejemo enačbe po



Slika A11.4: Skica dveh linearnih elementov. Vozlišča so prikazana s krogci; globalno številčenje vozlišč je prikazano izven elementov, lokalno pa znotraj elementov.

vozliščih. Obravnavajmo primer dveh linearnih elementov; $n_e = 2$, $n_k = 4$ (slika A11.4). Imamo torej 8 enačb (A12.12) za šest neznank:

$$
\begin{aligned}
-u_1^1 D_{1,1}^1 - u_2^1 D_{1,2}^1 - u_3^1 D_{1,3}^1 - u_4^1 D_{1,4}^1 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^1 D_{2,1}^1 - u_2^1 D_{2,2}^1 - u_3^1 D_{2,3}^1 - u_4^1 D_{2,4}^1 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^1 D_{3,1}^1 - u_2^1 D_{3,2}^1 - u_3^1 D_{3,3}^1 - u_4^1 D_{3,4}^1 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^1 D_{4,1}^1 - u_2^1 D_{4,2}^1 - u_3^1 D_{4,3}^1 - u_4^1 D_{4,4}^1 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^2 D_{1,1}^2 - u_2^2 D_{1,2}^1 - u_3^2 D_{1,3}^2 - u_4^2 D_{1,4}^2 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^2 D_{2,1}^2 - u_2^2 D_{2,2}^1 - u_3^2 D_{2,3}^2 - u_4^2 D_{2,4}^2 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^2 D_{3,1}^2 - u_2^2 D_{3,2}^1 - u_3^2 D_{3,3}^2 - u_4^2 D_{3,4}^2 + \ldots &= \ldots \\
-u_1^2 D_{4,1}^2 - u_2^2 D_{4,2}^1 - u_3^2 D_{4,3}^2 - u_4^2 D_{4,4}^2 + \ldots &= \ldots
\end{aligned}
$$

Lokalno številčenje vozliščnih vrednosti s pomočjo skice A11.4 pretvorimo v globalno: $u_1 = u_1^1$, $u_2 = u_2^1 = u_1^2$, $u_3 = u_2^2$, $u_4 = u_3^2$, $u_5 = u_3^1 = u_4^2$, $u_6 = u_4^1$. S pomočjo te pretvorbe zgornji sistem enačb prepišemo v

$$-u_1 D_{1,1}^1 - u_2 D_{1,2}^1 - u_5 D_{1,3}^1 - u_6 D_{1,4}^1 + \ldots = \ldots \tag{A12.13}$$
$$-u_1 D_{2,1}^1 - u_2 D_{2,2}^1 - u_5 D_{2,3}^1 - u_6 D_{2,4}^1 + \ldots = \ldots \tag{A12.14}$$
$$-u_1 D_{3,1}^1 - u_2 D_{3,2}^1 - u_5 D_{3,3}^1 - u_6 D_{3,4}^1 + \ldots = \ldots \tag{A12.15}$$
$$-u_1 D_{4,1}^1 - u_2 D_{4,2}^1 - u_5 D_{4,3}^1 - u_6 D_{4,4}^1 + \ldots = \ldots \tag{A12.16}$$
$$-u_2 D_{1,1}^2 - u_3 D_{1,2}^1 - u_4 D_{1,3}^2 - u_5 D_{1,4}^2 + \ldots = \ldots \tag{A12.17}$$
$$-u_2 D_{2,1}^2 - u_3 D_{2,2}^1 - u_4 D_{2,3}^2 - u_5 D_{2,4}^2 + \ldots = \ldots \tag{A12.18}$$
$$-u_2 D_{3,1}^2 - u_3 D_{3,2}^1 - u_4 D_{3,3}^2 - u_5 D_{3,4}^2 + \ldots = \ldots \tag{A12.19}$$
$$-u_2 D_{4,1}^2 - u_3 D_{4,2}^1 - u_4 D_{4,3}^2 - u_5 D_{4,4}^2 + \ldots = \ldots \tag{A12.20}$$

[7]Boris G. Galerkin (1871–1945), ruski inženir

Kot tak je sistem še vedno predoločen. Definirajmo, da enačba pripada tistem vozlišču oziroma neznanki, ki je pomnožena z integralom, ki ima $k = l$. Tako enačba (A12.13) pripada prvemu vozlišču, enačba (A12.14) drugemu, enačba (A12.15) petemu, enačba (A12.16) šestemu, enačba (A12.17) drugemu, enačba (A12.18) tretjemu, enačba (A12.19) četrtemu in enačba (A12.20) petemu. Vsakemu vozlišču pripada enako število enačb kot je elementov, katerim vozlišče pripada. V našem primeru drugo in peto vozlišče pripadata obema elementoma in zato imata po dve enačbi. Enačbi (A12.15) in (A12.20) ter (A12.14) in (A12.17) seštejemo in dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
-u_1D^1_{1,1} - u_2D^1_{1,2} - u_5D^1_{1,3} - u_6D^1_{1,4} + \ldots &= \ldots \\
-u_1D^1_{2,1} - u_2(D^2_{1,1} + D^1_{2,2}) - u_3D^1_{1,2} - u_4D^2_{1,3} - u_5(D^1_{2,3} + D^2_{1,4}) - u_6D^1_{2,4} + \ldots &= \ldots \\
-u_1D^1_{3,1} - u_2(D^1_{3,2} + D^2_{4,1}) - u_3D^1_{4,2} - u_4D^2_{4,3} - u_5(D^1_{3,3} + D^2_{4,4}) - u_6D^1_{3,4} + \ldots &= \ldots \\
-u_1D^1_{4,1} - u_2D^1_{4,2} - u_5D^1_{4,3} - u_6D^1_{4,4} + \ldots &= \ldots \\
-u_2D^2_{2,1} - u_3D^1_{2,2} - u_4D^2_{2,3} - u_5D^2_{2,4} + \ldots &= \ldots \\
-u_2D^2_{3,1} - u_3D^1_{3,2} - u_4D^2_{3,3} - u_5D^2_{3,4} + \ldots &= \ldots,
\end{aligned}
$$

ki ima enako število neznank in enačb. Sistem zapišemo v matrični obliki takole:

$$
\begin{vmatrix}
D^1_{1,1} & D^1_{1,2} & 0 & 0 & D^1_{1,3} & D^1_{1,4} \\
D^1_{2,1} & D^2_{1,1} + D^1_{2,2} & D^1_{1,2} & D^2_{1,3} & D^1_{2,3} + D^2_{1,4} & D^1_{2,4} \\
D^1_{3,1} & D^1_{3,2} + D^2_{4,1} & D^1_{4,2} & D^2_{4,3} & D^1_{3,3} + D^2_{4,4} & D^1_{3,4} \\
D^1_{4,1} & D^1_{4,2} & 0 & 0 & D^1_{4,3} & D^1_{4,4} \\
0 & D^2_{2,1} & D^1_{2,2} & D^2_{2,3} & D^2_{2,4} & 0 \\
0 & D^2_{3,1} & D^1_{3,2} & D^2_{3,3} & D^2_{3,4} & 0
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix}
= \ldots . \tag{A12.21}
$$

Razumljivo je, da bo sistemska matrika pri večjih mrežah prazna, saj v eni vrstici lahko nastopajo od nič različni členi samo pri vozliščih, ki so v elementih, v katerih je tudi vozlišče, kateremu pripada vrstica. V primeru štiri točkovnih linearnih elementov, ki smo jih za primer opisali zgoraj, je torej največje število od nič različnih elementov v vrstici sistemske matrike enako 9. Pri 9 točkovnih kvadratnih elementih pa je to število enako 25. Število od nič različnih členov v vrstici ostaja nespremenjeno ne glede na število elementov v računski mreži, medtem ko je skupno število vrstic enako številu vozlišč. Tako lahko ocenimo spominsko zahtevnost sistemske matrike na $9\times$ število vozlišč za linearne elemente. Ocena za kvadratne elemente je malo bolj zahtevna, saj ne pripadajo vsa vozlišča enakemu številu elementov, ampak vseeno spominska zahtevnost raste linearno s številom vozlišč v računski mreži. Neničelna struktura matrike na desni strani, ki vsebuje integrale $M^e_{k,l}$, je identična strukturi sistemske matrike. Obe zapišemo v CRS zapisu (glej prilogo A14 na strani 140).

Sistem je zaprt, ko predpišemo robne pogoje. V kolikor pretoka veličine u skozi steni ni, nam ni potrebno računati integralov po robu. Sistem rešujemo z iterativnim solverjem (Sleijpen in Fokkema [112]).

Interpolacijske funkcije so polinomi, zato so integrandi v integralih (A12.11) tudi polinomi. Integrale izračunamo numerično. Izvedemo transformacijo koordinatnega sistema (priloga A5 na strani 116) in uporabimo Gaussovo kvadraturno formulo, ki integrale izračuna s pomočjo utežene vsote vrednosti integracijske funkcije v točkah, ki so ničle Legendrovega polinoma (Bronstein et al. [14]).

A13 Metoda končnih elementov za skalarno difuzijsko advektivno parcialno diferencialno enačbo

Prenosni enačbi za vrtinčnost (4.23) in temperaturo (4.25) sta skalarni difuzijski advektivni parcialni diferencialni enačbi. Zapišimo jo za poljubno skalarno polje u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})u = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} u) + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + S, \tag{A13.1}$$

kjer je $\frac{\partial}{\partial t}$ parcialni odvod po času, $\vec{v}$ hitrostno polje, α difuzivnost ter $\vec{F}$ in S izvora. Izvora smo glede na uveljavljeno definicijo difuzivno advektivne enačbe (Gresho et al. [45]) razdelili na dva dela $(\vec{F}, S)$, brez izgube splošnosti.

Odvod po času aproksimiramo z nastavkom

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \beta u + M. \tag{A13.2}$$

V poglavju 5 smo na analitičnih primerih preverili različne vrednosti za β in M. Ugotovili smo, da najboljše rezultate dobimo z $\beta = \frac{3}{2\Delta t}$ in $M = -2\frac{u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u^{n-1}}{\Delta t}$, kjer je Δt časovni korak, u^n polje v trenutnem časovnem koraku, u^{n-1} pa polje v prejšnjem časovnem koraku. Vrednost M je odvisna od veličin iz prejšnjih časovnih korakov, zato jo lahko vključimo med izvore $S \to S - M$. Enačbo (A13.1) preoblikujemo v

$$\beta u + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})u = \alpha \nabla^2 u + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + S. \tag{A13.3}$$

Računsko območje Ω razdelimo na n_e elementov $\Omega \approx \sum_{e=1}^{n_e} \Omega_e$. Znotraj vsakega elementa e zapišemo uteženo integralsko enačbo (Gresho et al. [45])

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_e} \varpi \beta u d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \varpi (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} \varpi \alpha \nabla^2 u d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \varpi \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \alpha d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \varpi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} S \varpi d\Omega_e, \end{aligned} \tag{A13.4}$$

kjer je ϖ utežna funkcija. Difuzijski člen (prvi na desni strani enačbe (A13.4)) preoblikujemo s pomočjo Greenovega prvega stavka (A2.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \varpi \alpha \nabla^2 u d\Omega_e &= -\int_{\Omega_e} \vec{\nabla}(\varpi \alpha) \cdot \vec{\nabla} u d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \varpi \alpha \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Gamma}_e \\ &= -\int_{\Omega_e} \varpi \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} u d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \alpha \vec{\nabla} \varpi \cdot \vec{\nabla} u d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \varpi \alpha \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Gamma}_e. \end{aligned} \tag{A13.5}$$

Ko zgornje izvajanje (A13.5) vstavimo v enačbo (A13.4) ugotovimo, da se dva območna integrala medsebojno odštejeta, ostane

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_e} \varpi \beta u d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \varpi (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u d\Omega_e \\ &= -\int_{\Omega_e} \alpha \vec{\nabla} \varpi \cdot \vec{\nabla} u d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \varpi \alpha \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Gamma}_e + \int_{\Omega_e} \varpi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \varpi S d\Omega_e. \end{aligned} \tag{A13.6}$$

Vse funkcije polja znotraj elementov aproksimiramo z interpolacijskimi funkcijami. Znotraj elementa e velja:

$$u^e = \sum_{l=1}^{n_l} N_l u_l^e, \qquad \vec{F}^e = \sum_{l=1}^{n_l} N_l \vec{F}_l^e, \qquad S^e = \sum_{l=1}^{n_l} N_l S_l^e. \tag{A13.7}$$

Z navedenim se integralska enačba zapiše

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n_l} \beta u_l^e \int_{\Omega_e} \varpi N_l d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} \varpi (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) N_l d\Omega_e \\
= -\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} \alpha \vec{\nabla}\varpi \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Gamma_e} \varpi \alpha \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e \\
+ \sum_{l=1}^{n_l} F_x^e \int_{\Omega_e} \varpi \frac{\partial N_l}{\partial x} d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} F_y^e \int_{\Omega_e} \varpi \frac{\partial N_l}{\partial y} d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} S_l^e \int_{\Omega_e} \varpi N_l d\Omega_e.
\end{aligned} \tag{A13.8}$$

Za utežno funkcijo izberemo eno izmed interpolacijskih funkcij N_k. Enačba (A13.6) tako postane

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n_l} \beta u_l^e \int_{\Omega_e} N_k N_l d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} N_k (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) N_l d\Omega_e \\
= -\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Omega_e} \alpha \vec{\nabla} N_k \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \int_{\Gamma_e} N_k \alpha \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e \\
+ \sum_{l=1}^{n_l} F_x^e \int_{\Omega_e} N_k \frac{\partial N_l}{\partial x} d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} F_y^e \int_{\Omega_e} N_k \frac{\partial N_l}{\partial y} d\Omega_e + \sum_{l=1}^{n_l} S_l^e \int_{\Omega_e} N_k N_l d\Omega_e.
\end{aligned} \tag{A13.9}$$

Integrale poimenujemo

$$\begin{aligned}
M_{k,l}^e = \int_{\Omega_e} N_l N_k d\Omega_e, \qquad C_{k,l}^e = \int_{\Omega_e} N_k (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) N_l d\Omega_e, \\
D_{k,l}^e = \int_{\Omega_e} \alpha \vec{\nabla} N_k \cdot \vec{\nabla} N_l d\Omega_e, \qquad R_{k,l}^e = \int_{\Gamma_e} \alpha N_k \vec{\nabla} N_l \cdot d\vec{\Gamma}_e, \\
G_{k,l}^{x,e} = \int_{\Omega_e} N_k \frac{\partial N_l}{\partial x} d\Omega_e, \qquad G_{k,l}^{y,e} = \int_{\Omega_e} N_k \frac{\partial N_l}{\partial y} d\Omega_e
\end{aligned} \tag{A13.10}$$

in z njimi zapišemo enačbo

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n_l} \beta u_l^e M_{k,l}^e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e C_{k,l}^e = -\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e D_{k,l}^e + \sum_{l=1}^{n_l} u_l^e R_{k,l}^e \\
+ \sum_{l=1}^{n_l} F_x^e G_{k,l}^{x,e} + \sum_{l=1}^{n_l} F_y^e G_{k,l}^{y,e} + \sum_{l=1}^{n_l} S_l^e M_{k,l}^e.
\end{aligned} \tag{A13.11}$$

Neznanke u_l^e v enačbi (A13.11) preuredimo na levo stran

$$\sum_{l=1}^{n_l} u_l^e \left(\beta M_{k,l}^e + C_{k,l}^e + D_{k,l}^e - R_{k,l}^e \right) = \sum_{l=1}^{n_l} F_x^e G_{k,l}^{x,e} + \sum_{l=1}^{n_l} F_y^e G_{k,l}^{y,e} + \sum_{l=1}^{n_l} S_l^e M_{k,l}^e. \tag{A13.12}$$

Zgornjo enačbo imamo za vsak element $e = 1, \ldots, n_e$ in za vsako interpolacijsko funkcijo znotraj elementa $k = 1, \ldots, n_l$. Ker si elementi delijo vozlišča med seboj, je število enačb $n_e \cdot n_l$ večje od števila vozlišč. Določen sistem enačb dobimo, ko seštejemo enačbe po vozliščih. Podrobneje je način zlaganja enačb opisan v prilogi A12.

Advektivni, difuzijski in robni integrali ($C^e_{k,l}, D^e_{k,l}, R^e_{k,l}$) vsebujejo funkcije (hitrost in difuzivnost), ki so odvisne od kraja. Ko enačbo rešujemo v nelinearni iterativni zanki, je integrale potrebno na novo računati med vsako iteracijo. Robni integral je integral toka polja skozi rob elementa. Ko enačbo (A13.11) zapišemo za vse elemente, je tok skozi robove elementov nasproten in se pri zlaganju sistema enačb odšteje. Integrale je zato potrebno izračunati samo po zunanjih robovih.

A14 Posredno naslavljanje matrik

Matrike v računalniku klasično predstavimo z dvodimenzionalnim poljem realnih števil. V primeru, ko je veliko elementov matrike enako nič, se za zapis matrike uporabljajo metode indirektnega naslavljanja elementov (Hriberšek [52], Žunič [156]). Namesto velikega dvodimenzionalnega polja predstavimo matriko z vektorjem realnih števil, ki vsebuje vse od nič različne elemente v matriki in celoštevilčnimi vektorji, ki povedo, na katerem mestu v matriki se nahajajo elementi realnega vektorja. Postopkov posrednega naslavljanja elementov v matriki je več, vsem pa sta skupni dve glavni prednosti:

- v spominu se hranijo samo od nič različni elementi,
- pri operacijah z matrikami in vektorji se zmanjša število računskih operacij, saj ne izvajamo operacij z ničlami.

Pri uporabi valčne transformacije so postopki posrednega naslavljanja matrik zelo uporabni, saj z zanemarjanjem večino elementov v sistemski matriki postavimo na nič. Za izračune smo uporabili metodo strnjenega zapisa vrstic CRS *(Compressed Row Storage)*.

Količina pridobljenega spomina z zapisom CRS je odvisna količine od nič različnih elementov. Če je ničel zelo malo, se zgodi, da z zapisom CRS porabimo celo več spomina, kot s klasičnim zapisom v polju. Pri večinoma praznih matrikah pa je prihranek spomina velik. Omeniti velja tudi, da zapis celega števila zavzame 16 bitov, medtem ko zapis realnega števila z dvojno natančnostjo zavzame 64 bitov računalnikovega spomina. V algoritmu stiskanja matrik z valčno transformacijo smo zapisovali elemente valčno transformirane matrike v enojni natančnosti. Spominska zahtevnost CRS zapisa matrike z enojno natančnostjo je približno enaka zapisu enakega števila elementov v dvojni natančnosti.

A14.1 Strnjen zapis vrstic CRS

Naj bo sistemska matrika A velikosti $n \times n$ in ima n_{nz} členov različnih od nič. V CRS zapisu jo predstavimo s štirimi vektorji:

- $\vec{a}$: vsebuje vse od nič različne elemente matrike A,
- $\vec{s}$: vsebuje številke stolpcev, ki pripadajo elementom iz $\vec{a}$,
- $\vec{v}$: vsebuje zaporedne številke elementov v $\vec{a}$, ki so prvi v vsaki izmed vrstic matrike A,
- $\vec{d}$: vsebuje zaporedne številke elementov v $\vec{a}$, ki so na diagonali matrike A.

Oglejmo si še tipe in dolžine naštetih vektorjev v tabeli A14.1. Vidimo, da ima vektor začetkov vrstic $\vec{v}$ en element več kot je vrstic v matriki. Dogovorjeno je, da $n+1$-vi element v vektorju $\vec{v}$ kaže na začetek neobstoječe $n+1$-ve vrstice. Potrebujemo ga, da

Tabela A14.1: Tipi vektorjev v zapisu CRS. Vektor $\vec{a}$ je enakega tipa kot so elementi v matriki A, ki jo prepisujemo v CRS zapis.

vektor	tip	dolžina
$\vec{a}$	realno število	n_{nz}
$\vec{s}$	celo število	n_{nz}
$\vec{v}$	celo število	$n+1$
$\vec{d}$	celo število	n

lažje ugotovimo začetek in konec vrstic v vektorju $\vec{a}$. Tako za vse vrstice velja, da je začetek i-te vrstice pri $\vec{v}(i)$-tem elementu in konec pri $\vec{v}(i+1)-1$-tem elementu vektorja $\vec{a}$. Zapis CRS bomo pokazali na primeru. Naj bo sistemska matrika A velikosti $n=6$ z $n_{nz}=14$ členi različnimi od nič:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} & 0 & A_{46} \\ 0 & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{A14.1}$$

Vektorji CRS zapisa matrike A so naslednji:

- $\vec{a} = [A_{11}, A_{14}, A_{21}, A_{22}, A_{24}, A_{33}, A_{35}, A_{42}, A_{44}, A_{46}, A_{52}, A_{55}, A_{65}, A_{66}]$,
- $\vec{s} = [1, 4, 1, 2, 4, 3, 5, 2, 4, 6, 2, 5, 5, 6]$,
- $\vec{v} = [1, 4, 6, 9, 12, 14]$,
- $\vec{d} = [1, 3, 6, 8, 11, 13, 15]$.

Metoda strnjenega zapisa vrstic za zapis prazne matrike je zelo učinkovito orodje, ki nam prihrani tako računalniški spomin kot tudi procesorski čas brez kakršnegakoli vpliva na rezultat. Pri uporabi metode valčne transformacije, pri kateri veliko majhnih členov v sistemski matriki postavimo na nič, je metoda strnjenega zapisa vrstic vedno uporabna.

Literatura

[1] ANSYS. *CFX 5.7 users manual*, 2005.

[2] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira in B. Schönung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 127:473–496, 1983.

[3] D. J. Bergstrom in B-C. Wang. A modified dynamic subgrid scale stress model using vorticity in the constitutive relation.

[4] G. Beylkin, R. Coifman in V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Comm. Pure Appl. Math*, 44:141–183, 1991.

[5] D. Bouris in G. Bergeles. 2D LES of vortex shredding from a square cylinder. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 80:31–46, 1999.

[6] E. Brakkee, K. Vuik in P. Wesseling. An investigation of Schwarz domain decomposition using accurate and inaccurate solution of subdomains. Technical Report 95–18, TU Delft, 1995.

[7] E. Brakkee in P. Wesseling. Schwarz domain decomposition for the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinates. Technical Report 94–84, TU Delft, 1994.

[8] M. Braza, P. Chassaing in H. H. Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech*, 165:79–130, 1986.

[9] M. Breuer. Numerical and modelling influences on large eddy simulations for the flow past a circular cylinder. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 19:512–521, 1998.

[10] M. Breuer. A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 21:648–654, 2000.

[11] M. Breuer. *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Shaker Verlag, Aachen, 2002.

[12] M. Breuer in N. Jovičič. Separated flow around a flat plate at high incidence: a LES investigation. *J. Turbul.*, 018, 2001.

[13] M. Breuer, N. Jovičič in K. Mazaev. Comparison of DES, RANS and LES for the separated flow around a flat plate at high incidence. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 41:357–388, 2003.

[14] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol in H. Mühlig. *Matematični priročnik*. Tehniška založba Slovenije, 1997.

[15] M. J. Brown, A. A. Mammoli in M. S. Ingber. Parallel multipole implementation of the generalized Helmholz decomposition for solving viscous flow problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 58:1617–1635, 2003.

[16] H. F. Bucher, L. C. Wrobel, W. J. Mansur in C. Magluta. A novel approach to applying fast wavelet transforms in boundary element method. *El. J. of Bound. Elements*, BETEQ 2001(2):187–195, 2002.

[17] D. Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional stream function-vorticity equations in irregular regions. *J. Comput. Phys.*, 196:231–275, 2002.

[18] M. Campolo, M.V. Salvetti in A. Soldati. Mechanisms for microparticle dispersion in a jet in crossflow. *AIChE J*, 51:28–43, 2005.

[19] D. Carati, A. Wray in W. Cabot. Ensemble averaged dynamic modelling. In *Proceedings of the Summer Program*, pages 237–248. Center for Turbulence Research, 1996.

[20] Y. T. Chan. *Wavelet Basics.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[21] J. P. Chollet in M. Lesieur. Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closure. *J. Atmos. Sci.*, 38:2747–2757, 1981.

[22] S. S. Collis in Y. Chang. On the use of LES with a dynamic subgrid-scale model for optimal control of wall bounded turbulence. In *Processings of the second AFOSR International Conference on DNS/LES*, 1999.

[23] M. Coutanceau in R. Buoard. Experimental determination of main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow. *J. Fluid Mech.*, 1977:231–256, 79.

[24] G. Dantinne, H. Jeanmart, G. S. Winckelmans, V. Legat in D. Carati. Hyperviscosity and vorticity-based models for subgrid scale modeling. *Applied Scientific Research*, 59:409–420, 1998.

[25] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.

[26] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Society for industrial and applied mathematics, 1992.

[27] L. Davidson. Implementation of a large eddy simulation method applied to recirculating flow in a ventilated room. Technical report, Aalborg University, 1996.

[28] G. D. V. Davies. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 3:249–264, 1983.

[29] W.J. Decker. *Numerical studies of bifurcations and chaos in natural convection.* Doktorska disertacija, University of Virginia, USA, 1996.

[30] S. C. R. Dennis. Methods of solution of the velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 122:300–306, 1995.

[31] S. C. R. Dennis in G. Chang. Numerical solution for steady flow past a circular cylinder at reynolds number up to 100. *J. Fluid Mech.*, 42:471–489, 1970.

[32] M. El-Gebeily, W. M. Elleithy in H. J. Al-Gahtani. Convergence of the domain decomposition finite element - boundary element coupling methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:4851–4867, 2002.

[33] T. E. Faber. *Fluid dynamics for physicists.* Cambridge university press, 1995.

[34] B. Fornberg. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 98:819–855, 1980.

[35] Message Passing Interface Forum. *MPI: A Message-Passing Interface Standard*, version 1.1 edition, 1995.

[36] R. Friedrich in M. Arnal. Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass filtered Navier-Stokes equations. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 35:101–128, 1990.

[37] R. Friedrich, T. J. Hüttl, M. Manhart in C. Wagner. Direct numerical simulation of incompressible turbulent flows. *Comput. Fluids*, 30:555–579, 2001.

[38] J. Frölich in W. Rodi. LES of the flow around a circular cylinder of finite height. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 25:537–548, 2004.

[39] D.K. Gartling. A test problem for outflow boundary conditions - flow over a backward-facing step. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 11:953–967, 1990.

[40] M. Germano. Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238:325–336, 1992.

[41] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin in W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3:1760–1765, 1991.

[42] U. Ghia, K.N. Ghia in C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48:387–411, 1982.

[43] D. G. Gomes. Optimization of flat plate solar collectors. Magistrsko delo, TIA - Technological Institute of Aeronautics, São José dos Campos, Brazil, 1998.

[44] P. M. Gresho, D. K. Gartling, J. R. Torczynski, K. A. Cliffe, K. H. Winters, T. J. Garratt in J. W. Goodrich. Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing step at $Re = 800$ stable? *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 17:501–541, 1993.

[45] P. M. Gresho, R. L. Sani in M. S. Engelman. *Incompressible flow and the finite element method.* John Wiley and sons, Ltd, 2000.

[46] M. M. Grigoriev in G. F. Dargush. A poly-region boundary element method for incompressible viscous fluid flows. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46:1127–1158, 1999.

[47] A. Haar. Zur theorie der ortogonalen funktionensysteme. *Math. Ann.*, 69:331–371, 1910.

[48] K. Hanjalič. Will RANS survive LES? A view of perspectives. *J. Fluids Eng-T ASME*, 127:831–839, 2005.

[49] C. Härtel. *Handbook of Computational Fluid Dynamics*, chapter Turbulent flows: direct numerical simulation and large-eddy simulation, pages 283–338. Academic press, 1996.

[50] J. O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill Book Company, 1975.

[51] A. Horvat. *Modeliranje turbulentne naravne konvekcije v kapljevini z notranjo generacijo toplote z metodo velikih vrtincev*. Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2001.

[52] M. Hriberšek. *Iterativne metode v robno-območni integralski metodi za dinamiko tekočin*. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, 1995.

[53] M. Hriberšek in L. Škerget. Boundary domain integral method for high Reynolds viscous fluid flows in complex planar geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 194:4196–4220, 2005.

[54] K. J. Hsieh in F. S. Lien. Numerical modelling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 25(4):659–670, August 2004.

[55] D. Iftimie, T. C. Sideris in P. Gamblin. On the evolution of compactly supported planar vorticity. *Comm. Partial Differential Equations*, 24:1709—1730, 1999.

[56] M. S. Ingber. A vorticity method for the solution of natural convection flows in enclosures. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Fl.*, 13:655–671, 2003.

[57] J. Keskar in D. A. Lyn. Computations of laminar backward-facing step flow at $Re = 800$ with a spectral domain decomposition method. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 29:411–427, 1999.

[58] D-H. Kim, K-S. Yang in M. Senda. Large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder confined in a channel. *Comput. Fluids*, 33:81–96, 2004.

[59] J. Kim, P. Moin in R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.

[60] M.K. Kobayashi, J.C.F. Periera in J.M.M. Sousa. Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 16:403–419, 1993.

[61] A.N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32:19–21, 1941.

[62] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:299–303, 1941.

[63] K. Koro in K. Abe. *Boundary elements XXII*, chapter H-Hierarchical adaptive BEM with Haar wavelet functions for two-dimensional Laplace problems, pages 229–238. WIT Press, 1999.

[64] J. Kramer, R. Jecl in L. Škerget. Nevrtinčni tok tekočine okrog kvadra. In *Kuhljevi dnevi 2005*, pages 159–166, 2005.

[65] H. Le, P. Moin in J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. Technical Report TF-58, University of California, 1996.

[66] M. Lesieur, H. Choi in J. Kim. *Computational methods in applied sciences*, chapter Direct numerical simulations of turbulence, pages 37–43. Elsevier, 1992.

[67] M. Lesieur, P. Comte in O. Metais. Numerical simulations of coherent vortices in turbulence. *Appl. Mech. Rev.*, 48:121–149, 1995.

[68] D. K. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, 4:633–635, 1992.

[69] Z. Liu, X. Zheng in C. H. Sung. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 160:151–178, 2000.

[70] P. Luchini in M. Quadrio. A low-cost parallel implementation of direct numerical simulation of wall turbulence. *J. Comput. Phys.*, 211:551–571, 2006.

[71] T. Lundgren in P. Koumoutsakos. On the generation of vorticity at a free surface. *J. Fluid Mech.*, 382:351–366, 1999.

[72] J. R. Mansfield, O. M. Knio in C. Meneveau. A dynamic LES scheme for vorticity transport equation: formulation and a priori tests. *J. Comput. Phys.*, 145:693–730, 1998.

[73] N. N. Mansour, J. H. Ferziger in W. C. Reynolds. Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. Report TF-11, Thermosciences Div., Dept. of Mech. Eng., Standford University., 1978.

[74] J. Mathew in A. J. Basu. An economical method for direct numerical simulation studies of transitional round jets. *Comput. Fluids*, 30:543–554, 2001.

[75] C. Meneveau in J. Katz. Dynamic testing of subgrid models in large eddy simulation based on the germano identity. *Phys. Fluids*, 11:245–247, 1999.

[76] P. Moin in J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 118:341–377, 1982.

[77] R. D. Moser in P. Moin. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence. *J. Fluid Mech.*, 272:275–320, 1994.

[78] S. Murakami in A. Mochida. On turbulent vortex shredding flow past 2D square cylinder predicted by CFD. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 54/55:191–211, 1995.

[79] N. V. Nikitin, F. Nocoud, B. Wasistho, K. D. Squires in P. R. Spalart. An approach to wall modelling in large-eddy simulations. *Phys. Fluids*, 12:1629–1632, 2000.

[80] M. Ollson in L. Fuchs. Large eddy simulation of the proximal region of a spatially developing impinging jet. *Phys. Fluids*, 8:2125–2137, 1996.

[81] Patrick H. Oosthuizen in Jane T. Paul. Natural convection in a rectangular enclosure with two heated sections on the lower surface. *J. Comput. Phys.*, 26:587–596, 2005.

[82] I. Orlanski. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.*, 21:251–269, 1976.

[83] P. O'Neill in J. Soria. The relationship between the topological structures in turbulent flow and the distribution of a passive scalar with an imposed mean gradient. *Fluid Dyn. Res.*, 36:107–120, 2005.

[84] E. G. Paterson in L. J. Peltier. Detached eddy simulation of high Reynolds number bevelled trailing edge boundary layers and wakes. *J. Fluids Eng-T ASME*, 127:897–906, 2005.

[85] S. H. Peng in L. Davidson. Large eddy simulation for turbulent buoyant flow in a confined cavity. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 22:323–331, 2001.

[86] Y-F. Peng, Y-H. Shiau in R. R. Hwang. Transition in a 2-D lid-driven cavity flow. *Comput. Fluids*, 32:337–352, 2003.

[87] U. Piomelli. High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid scale stress model. *Phys. Fluids A*, 5:295–1490, 1993.

[88] S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.

[89] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling in B. P. Flannery. *Numerical Recipes - The Art of Scientific computing, Second Edition*. Cambridge University Press, 1997.

[90] C. D. Pruett. Toward the de-mystification of LES. In *DNS/LES progress and challenges*, page 231, 2001.

[91] D. I. Pullin in P. G. Saffman. Vortex dynamics in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30:31–51, 1998.

[92] M. Ramšak in L. Škerget. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function - vorticity formulation. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 46:815–847, 2004.

[93] M. Ramšak. *Večobmočna metoda robnih elementov za dvoenačbne turbulentne modele*. Doktorska disertacija, University of Maribor, Faculty of mechanicall engineering, 2004.

[94] J. Ravnik. Valčna transformacija v modelu robnih elementov za dinamiko tekočin. Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2003.

[95] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. Diskretna valčna transformacija za metodo robnih elementov v mehaniki tekočin. In *Kuhljevi dnevi 2004*, pages 229–236, 2004.

[96] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 28:1303–1314, 2004.

[97] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. Nasproti hitrostno vrtinčni simulaciji velikih vrtincev z metodo robnih elementov. In *Kuhljevi dnevi 2005*, pages 247–254, 2005.

[98] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. Towards velocity-vorticity based large eddy simulation with boundary element method. In *Advanced computational engineering mechanics: proceedings of the 2. Workshop*, 2005.

[99] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. 2D velocity vorticity based LES for the solution of natural convection in a differentially heated enclosure by wavelet transform based BEM and FEM. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, accepted, 2006.

[100] H. L. Resnikoff in Jr. R. O. Wells. *Wavelet Analysis.* Springer-Verlag, 1998.

[101] L.F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process.* Cambridge University Press, 1922.

[102] W. Rodi. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 69, 71:55–75, 1997.

[103] R. S. Rogallo in P. Moin. Numerical simulation of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16:99–137, 1984.

[104] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, An Introduction.* Springer Verlag, 2002.

[105] P. Sagaut in R. Grohens. Discrete filters for large eddy simulation. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 31:1195–1220, 1999.

[106] J. Salat, S. Xin, P. Joubert, A. Sergent, F. Penot in P. Le Quéré. Experimental and numerical investigation of turbulent natural convection in a large air-filled cavity. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 25:824–832, 2004.

[107] F. J. Saulinez, L. N. Long, P. J. Morris in A. Sharma. Landing gear aerodynamic noise prediction using unstructured grids. *AIAA Paper 2002-0799*, , 2002.

[108] A. Scotti, C. Meneveau in M. Fatica. Dynamic Smagorinsky model on anisotropic grids. *Phys. Fluids*, 9:1856–1858, 1997.

[109] R. P. Selvam. Finite element modelling of flow around circular cylinder using LES. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 67, 68:129–139, 1997.

[110] H. Shan, L. Jiang in C. Liu. Direct numerical simulation of flow separation around a NACA 0012 airfoil. *Comput. Fluids*, 34:1096–1114, 2005.

[111] W.-Z. Shen in T.-P. Loc. Numerical method for unsteady 3D Navier-Stokes equations in veloctiy-vorticity form. *Comput. Fluids*, 26:193–216, 1997.

[112] G. L. G. Sleijpen in D. R. Fokkema. Bicgstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *El. Trans. on Numerical Analysis*, 1:11–32, 1993.

[113] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic equations. *Mon Weather Rev*, 91:99–164, 1963.

[114] A. Sohankar, L. Davidson in C. Norberg. Large eddy simulation of flow past a square cylinder: Comparison of different subgrid scale models. *J. Fluids Eng-T ASME*, 122:39–47, 2000.

[115] A. Soldati. Particles turbulence interactions in boundary layers. *ZAMM*, 85:683–699, 2005.

[116] G. G. Stokes. On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8:287–319, 1845.

[117] J. Strnad. *Fizika, drugi del: Elektrika, Optika.* DZS, Ljubljana, 1978.

[118] L. Škerget. *Mehanika Tekočin*. Tehniška fakulteta v Mariboru in Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, 1994.

[119] L. Škerget, A. Alujevič, C. A. Brebbia in G. Kuhn. *Topics in Boundary Element Research*, volume 5, chapter Natural and Forced Convection Simulation Using the Velocity-Vorticity Approach, pages 49–86. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[120] L. Škerget, M. Hriberšek, J. Ravnik in Z. Žunič. Linear and nonlinear solutions of flow around cylindrical obstacle. In *Advanced computational engineering mechanics : proceedings of the 2. Workshop*, 2005.

[121] L. Škerget, M. Hriberšek in Z. Žunič. Natural convection flows in complex cavities by BEM. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Fl.*, 13:720–735, 2003.

[122] L. Škerget in M. Hriberšek. Bemflow v2.06, programska oprema za izračun laminarnega, turbulentnega toka nestisljivega newtonskega ali ne-newtonskega fluida z vezanim prenosom toplote in snovi. Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2002.

[123] L. Škerget in J. Ravnik. Study of the natural convection unsteadiness in a differentially heated enclosure under large temperature gradients. In *ICCES'05*, pages 467–472, December 2005.

[124] L. Škerget, J. Ravnik in Z. Žunič. Incompressible viscous flow past a circular cylinder. In *1st international conference on modelling, simulation and applied optimisation*, 2005.

[125] L. Škerget in N. Samec. BEM for the two-dimensional plane compressible fluid dynamics. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 29:41–57, 2005.

[126] L. Škerget, N. Samec in J. Ravnik. BEM for the solution of natural convection enclosure with large temperature gradients. In *Aveiro: Centre for Mechanical technology and Automation: Department of Mechanical Engineering*, pages 691–698, 2005.

[127] G. I. Taylor. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, 223:289–343, 1923.

[128] G. I. Taylor. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 135:685–705, 1932.

[129] C. Tenaud, S. Pellerin, A. Dulieu in L. Ta Phuoc. Large eddy simulation of a spatially developing incompressible 3D mixing layer using $v-\omega$ formulation. *Comput. Fluids*, 34:67–96, 2005.

[130] Y. S. Tian in T. G. Karayiannis. Low turbulence natural convection in an air filled square cavity: Part I: the thermal and fluid flow fields. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 43:849–866, 2000.

[131] D. J. Tritton. Experiments on the flow part a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6:547–567, 1959.

[132] S. Vardoulakis, B. E. A. Fisher, K. Pericleous in N. Gonzales-Flesca. Modelling air quality in street canyons: a review. *Atmospheric Environment*, 37:155–182, 2003.

[133] J. Vierendeels, B. Merci in E. Dick. Numerical study of the natural convection heat transfer with large temperature differences. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Fl.*, 11:329–341, 2001.

[134] J. Vierendeels, B. Merci in E. Dick. A multigrid method for natural convective heat transfer with large temperature differences. *Int. J. Comput. Appl. Math.*, 168:509–517, 2004.

[135] A. Vincent in M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogenous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225:1–20, 1991.

[136] A. K. Viswanathan in D. K. Tafti. Detached eddy simulation of turbulent flow and heat transfer in a ribbed duct. *J. Fluids Eng-T ASME*, 127:888–896, 2005.

[137] C. Wagner in R. Friedrich. *Advances in turbulence V.*, chapter Turbulent flow in a sudden pipe expansion, pages 544–548. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[138] C. Weisman, L. Calsyn, C. Dubois in P. Le Quéré. Sur la nature de la transition a l'instationare d'un ecoulement de convection naturelle en cavite differentiellement chauffee a grands ecarts de temperature. *Comptes rendus de l'academie des sciences Serie II b, Mecanique*, pages 343–350, 2001.

[139] E. W. Weisstein. Heat conduction equation. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, 2005.

[140] G. S. Winckelmans, T. S. Lund, D. Carati in A. A. Wray. A priori testing of subgrid-scale models for the velocity pressure and vorticity-veloctiy formulations. In *Proceedings of the Summer Program*. Center for Turbulence Research, 1996.

[141] G. S. Winckelmans, A. A. Wray, O. V. Vasilyev in H. Jeanmart. Explicit-filtering large-eddy simulation using the tensor-diffusivity model supplemented by a dynamic Smagorinsky term. *Phys. Fluids*, 13:1385–1403, 2001.

[142] L. C. Wrobel. *The Boundary Element Method*. John Willey & Sons, LTD, 2002.

[143] J. C. Wu in J. F. Thompson. Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using an integro-differential formulation. *Compt. Fluids*, 1:197–215, 1973.

[144] S. Xin in P. Le Quéré. Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *J. Fluid Mech.*, 304:87–118, 1995.

[145] D. L. Young, Y. H. Liu in T. I. Eldho. A combined BEM-FEM model for velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations in three dimensions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 24:307–314, 2000.

[146] D. Yu in A. Kareem. Two-dimensional simulation of flow around rectangular prisms. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 62:131–161, 1996.

[147] D. Yu in A. Kareem. Numerical simulation of flow around rectangular prism. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 67, 68:195–208, 1997.

[148] P. S. B. Zdanski, M. A. Ortega in N. G. C. R. Fico Jr. Convection effects in flows over cavities of high aspect ratios. *AIAA Paper*, page 3301, 2002.

[149] P. S. B. Zdanski, M. A. Ortega in N. G. C. R. Fico Jr. Numerical study of the flow over shallow cavities. *Comput. Fluids*, 32:953–974, 2003.

[150] P. S. B. Zdanski, M. A. Ortega in N. G. C. R. Fico Jr. Heat transfer studies in the flow over shallow cavities. *J. Heat Transf.*, 127:699–712, 2005.

[151] H. Zhou. On the motion of slander vortex filaments. *Phys. Fluids*, 9:970–981, 1997.

[152] I. Žagar. Prostorski transportni problemi v trdninah in tekočinah z metodo robnih elementov. Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1989.

[153] I. Žagar. *Robno-območna integralska metoda za dinamiko tekočin laminarnega in turbulentnega toka.* Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1992.

[154] Z. Žunič, L. Škerget, M. Hriberšek in J. Ravnik. Boundary element - finite element method for incompressible viscous fluid flow. In *2. workshop on advanced computational engineering mechanics*, pages 73–82, 2005.

[155] Z. Žunič, L. Škerget, M. Hriberšek in J. Ravnik. Boundary element-finite element method for velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations. In *WIT transactions on modelling and simulation, Vol. 41*, pages 793–802, 2005.

[156] Z. Žunič. Direktne metode za reševanje sistemov enačb v robno-območni integralski metodi. In *Kuhljevi dnevi*, 1998.

Dodatki

B1 Curriculum Vitae

Ime in priimek:	Jure Ravnik	
Rojen:	14. julij 1973 na Jesenicah	
Šolanje:	1980 - 1988	Osnovna šola Tone Čufar Jesenice
	1988 - 1992	Center srednjega usmerjenega izobraževanja Jesenice, matematično fizikalna smer
	1992 - 1997	Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko
	2001 - 2006	Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo
Zaposlitev:	junij 1997 - december 1998	Uprava RS za geofiziko, Ljubljana
	december 1998 - oktober 2003	Institut za ekološki inženiring, d.o.o.
	november 2003 - danes	Univerza v Mariboru Fakulteta za strojništvo

Jure Ravnik je po diplomi iz fizike strokovno pot začel na upravi RS za geofiziko, kjer je deloval kot seizmolog in se ukvarjal s sipanjem seizmičnih valov. Po poroki se je preselil v Maribor in pet let deloval na Institutu za ekološki inženiring, d.o.o., kjer se je ukvarjal z okoljsko problematiko varstva podzemnih in površinskih voda. Ob delu je na Fakulteti za strojništvo Univerze v Mariboru pod mentorstvom prof. Škergeta zaključil podiplomski študij iz tehniškega varstva okolja [94]. Podiplomski študij je kot mladi raziskovalec pod mentorstvom prof. Škergeta nadaljeval na Fakulteti za strojništvo Univerze v Mariboru. S štipendijo programa HPC Europa se je dva meseca izpopolnjeval na Univerzi v Stuttgardu in en mesec na Univerzi v Udinah. Vsebino doktorske disertacije bo objavil v dveh izvirnih znanstvenih člankih ([96, 99]). Skupaj s sodelavci Inštituta za energetsko, procesno in okoljsko inženirstvo je znanstveno raziskovalno delo predstavljal na domačih [95, 97] in tujih znanstvenih konferencah [98, 120, 123, 124, 126, 154, 155].

B2 Bibliografija avtorja

ČLANKI IN DRUGI SESTAVNI DELI

1.01 Izvirni znanstveni članek

1. RAVNIK, Jure, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž. The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Eng. anal. bound. elem.*. [Print ed.], 2004, 28, 11, str. 1303-1314. http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.05.002. [COBISS.SI-ID 9039126]

2. RAVNIK, Jure, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž. 2D velocity vorticity based LES for the solution of natural convection in a differentially heated enclosure by wavelet transform based BEM and FEM *Eng. anal. bound. elem.*, sprejeto v objavo, 2006

1.04 Strokovni članek

3. RAVNIK, Jure. De Vaucouleurjeva in Tully-Fisherjeva zveza. *Spika*, 1995, letn. 3, št. 11, str. 486-487. [COBISS.SI-ID 10319126]

4. CECIĆ, Ina, ŽIVČIĆ, Mladen, RAVNIK, Jure. Potresi v Sloveniji leta 1996 = Earthquakes in Slovenia in 1996. *Ujma (Ljublj.)*, 1997, št. 11, str. 27-33. [COBISS.SI-ID 99913472]

5. CECIĆ, Ina, ŽIVČIĆ, Mladen, GOSAR, Andrej, RAVNIK, Jure. Potresi v Sloveniji leta 1997 = Earthquakes in Slovenia in 1997. V: LAPAJNE, Janez (ur.). *Potresi v letu 1997*. Ljubljana: RS Ministerstvo za okolje in prostor, Uprava RS za geofiziko, 1998, str. 11-42. [COBISS.SI-ID 17738279]

6. RAVNIK, Jure, ŽIVČIĆ, Mladen, TRNKOCZY, Amadej. Modeliranje zmogljivosti mreže potresnih opazovalnic = Modelling location capability of seismic network. *Potresi (Ljubl.)*, 1999, str. 73-82. [COBISS.SI-ID 52748801]

7. RAVNIK, Jure, ŽIVČIĆ, Mladen. Faktor dobrote Q za osrednjo Slovenijo = Coda Q from earthquakes in central Slovenia. V: VIDRIH, Renato (ur.). *Potresi v letu 2000*. Ljubljana: Agencija RS za okolje, 2001, str. 95-104. [COBISS.SI-ID 10289430]

8. ČARMAN, Martina, KOBAL, Matjaž, KOLAR, Janko, PAHOR, Jurij, RAVNIK, Jure, ŽIVČIĆ, Mladen. Analiza seizmičnega šuma na opazovalnicah državne mreže potresnih opazovalnic, ki so začele delovati pred letom 2003. *Potresi (Ljubl.)*, 2003, str. 69-76. [COBISS.SI-ID 10114070]

1.06 Objavljeni znanstveni prispevek na konferenci (vabljeno predavanje)

9. ŠKERGET, Leopold, RAVNIK, Jure. Study of the natural convection unsteadiness in a differentially heated enclosure under large temperature gradients. V: SIVAKUMAR, S.M. (ur.). Proceedings of ICCES 05, December 1-6, 2005, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai, India. *Advances in computational & experimental engineering and sciences : proceedings of ICCES '05, December 1-6, 2005, Chennai, India*. [S.l.]: Tech Science Press, 2005, 476-472 f. [COBISS.SI-ID 10070294]

1.08 Objavljeni znanstveni prispevek na konferenci

10. RAVNIK, Jure, KRAJNC, Uroš. Calibration of a groundwater model using continuous river level measurements. V: *Proceedings of the 4th international conference on calibration and reliability in groundwater modelling*. Prague: Karlova Univerzita, Nakladatelství Karolinum, 2002, vol. 1, str. 261-263. [COBISS.SI-ID 8026902]

11. RAVNIK, Jure, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž. Diskretna valčna transformacija za metodo robnih elementov v mehaniki tekočin. V: KORELC, Jože (ur.), ZUPAN, Dejan (ur.). Kuhljevi dnevi 2004, Otočec, 30. september - 1. oktober 2004. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2004, str. 229-236. [COBISS.SI-ID 9069334]

12. ŽUNIČ, Zoran, HRIBERŠEK, Matjaž, ŠKERGET, Leopold, RAVNIK, Jure. Boundary element -finite element method for incompressible viscous fluid flow. V: KUHN, Günther (ur.), REN, Zoran (ur.), ŠKERGET, Leopold (ur.), HRIBERŠEK, Matjaž (ur.). 2. Workshop on Advanced Computational Engineering Mechanics, Erlangen, June 30- July 2, 2005. *Advanced computational engineering mechanics : proceedings of the 2. Workshop, Erlangen, Germany, June 30 - July 2, 2005.* Erlangen: Chair of Applied Mechanics, Friedrich-Alexander University, cop. 2005, str. 73-82. [COBISS.SI-ID 9678358]

13. ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž, RAVNIK, Jure, ŽUNIČ, Zoran. Linear and nonlinear solutions of flow around cylindrical obstacle. V: KUHN, Günther (ur.), REN, Zoran (ur.), ŠKERGET, Leopold (ur.), HRIBERŠEK, Matjaž (ur.). 2. Workshop on Advanced Computational Engineering Mechanics, Erlangen, June 30- July 2, 2005. *Advanced computational engineering mechanics : proceedings of the 2. Workshop, Erlangen, Germany, June 30 - July 2, 2005.* Erlangen: Chair of Applied Mechanics, Friedrich-Alexander University, cop. 2005, str. 215-224. [COBISS.SI-ID 9678614]

14. RAVNIK, Jure, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž. Towards velocity-vorticity based large eddy simulation with boundary element method. V: KUHN, Günther (ur.), REN, Zoran (ur.), ŠKERGET, Leopold (ur.), HRIBERŠEK, Matjaž (ur.). 2. Workshop on Advanced Computational Engineering Mechanics, Erlangen, June 30- July 2, 2005. *Advanced computational engineering mechanics : proceedings of the 2. Workshop, Erlangen, Germany, June 30 - July 2, 2005.* Erlangen: Chair of Applied Mechanics, Friedrich-Alexander University, cop. 2005, str. 253-261. [COBISS.SI-ID 9679126]

15. ŽUNIČ, Zoran, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž, RAVNIK, Jure. Boundary element-finite element method for velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations. V: BREBBIA, Carlos Alberto (ur.), CARLOMAGNO, G. M. (ur.). 12th International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements [also] CMEM XII, Malta, 2005. *Computational methods and experimental measurements XII*, (WIT transactions on modelling and simulation, Vol. 41). Southampton; Boston: Wit, cop. 2005, str. 793-802. [COBISS.SI-ID 9670422]

16. ŠKERGET, Leopold, SAMEC, Niko, RAVNIK, Jure. BEM for the solution of natural convection enclosure with large temperature gradients. V: ÖCHSNER, Andreas (ur.), GRÁCIO, José (ur.), BARLAT, Frederic (ur.). *Proceedings of the 1st International Conference on Diffusion in Solids and Liquids "DSL-2005": [6-8 of July, 2005, Averio - Portugal]*. Aveiro: Centre for Mechanical technology and Automation: Department of Mechanical Engineering, 2005, str. 691-698. [COBISS.SI-ID 9686806]

17. RAVNIK, Jure, ŠKERGET, Leopold, HRIBERŠEK, Matjaž. Nasproti hitrostno vrtinčni formulaciji simulacije velikih vrtincev z metodo robnih elementov. V: KORELC, Jože (ur.), ZUPAN, Dejan (ur.). Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, 22.-23. september 2005. *Zbornik del.* Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2005, str. 247-254. [COBISS.SI-ID 9910806]

1.09 Objavljeni strokovni prispevek na konferenci

18. SMAKA-KINCL, Vesna, MRAVLJE, Olga, PRAJNC POTRČ, Suzana, BAVEC, Martina, BAVEC, Franc, ZADRAVEC, Draga, BRUMEN, Stanko, LAPAJNE, Slavko, BLAŽEKA, Željko, RAVNIK, Jure, KOPAČ, Irena. Rehabilitation programme for the protection of groundwater as a source of drinking water in the Maribor area in light of new EU regulations = Sanacijski program za zaščito podtalnic kot virov pitne vode na območju mariborske regije v luči novih evropskih

predpisov. V: *The quality of underground water as the source of drinking water. workshop in Maribor, November 22nd-23rd 2001.* Maribor: Municipality of Maribor, Environmental Protection Agency, 2001, [42] f. [COBISS.SI-ID 7904278]

19. RAVNIK, Jure. Vpliv nivoja gladine Drave na tok podzemne vode. V: 13. Mišičev vodarski dan, Maribor, 29. november 2002. *Zbornik referatov*, (Mišičev vodarski dan). [Maribor: Vodnogospodarski biro], 2002, 2002, str. 92-98. [COBISS.SI-ID 8024598]

1.17 Samostojni strokovni sestavek v monografiji

20. ŽIVČIĆ, Mladen, RAVNIK, Jure. Detectability and earthquake location accuracy modeling of seismic networks : information sheet. V: BORMANN, Peter (ur.). *New manual of seismological observatory practice.* Potsdam: GeoForschungsZentrum: IASPEI, 2002, iS 7.4, 3 str., graf. prikazi. [COBISS.SI-ID 8029974]

MONOGRAFIJE IN DRUGA ZAKLJUČENA DELA

2.09 Magistrsko delo

21. RAVNIK, Jure. *Valčna transformacija v modelu robnih elementov za dinamiko tekočin : magistrsko delo.* Maribor: [J. Ravnik], 2003. VI, 163 str., ilustr., graf. prikazi. [COBISS.SI-ID 8251926]

2.11 Diplomsko delo

22. RAVNIK, Jure. *Sipanje seizmičnih valov na območju Slovenije : diplomsko delo.* Ljubljana: [J.Ravnik], 1997. 52 f., graf. prikazi. [COBISS.SI-ID 516452]

2.12 Končno poročilo o rezultatih raziskav

23. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Monitoring nadomestnega ponikalnika Hoče : končno poročilo : (od 1.6.2001 do 31.6.2002).* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55308545]

24. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, MEZANG-NKODO, Gabriel, KLEPEC, Sebastjana. *Poročilo o obratovalnem monitoringu za odlagališče za nenevarne odpadke Pobrežje : leto 2001 : hidrološke in meteorološke meritve, ocena količine in vpliva izcednih vod, primerjava kakovostnih analiz.* [Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55307009]

25. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Poročilo o obratovalnem monitoringu za odlagališče za nenevarne odpadke Pobrežje : leto 2002 : hidrološke in meteorološke meritve, ocena količine in vpliva izcednih vod, primerjava kakovostnih analiz.* [Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2003]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55308801]

2.13 Elaborat, predštudija, študija

26. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Negativni vodnjaki ob cesti M3 : posnetek začetnega hidrološkega stanja ob zagonu negativnih vodnjakov ob cesti M3 : [poročilo o opravljenem črpalnem preiskusu]*. Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55307521]

27. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Študija obremenitve za zazidalni načrt Te5 : ocena obstoječega stanja podtalnice in obremenitev, ki izhajajo iz zakonskih in prostorskih podlag : [strokovna ocena]*. Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55307777]

28. KRAJNC, Uroš, CZURDA, Duška, BLAŽEKA, Željko, GOBEC, Simona, ŽAJA, Sabina, RAVNIK, Jure, IGNJATOVIĆ, Maša, ŠUMAN, Slavko, STERGER, Borut, KRALJ, Petra. *Vodooskrba slovenske obale in zalednega kraškega območja : preveritve možnih vodnih virov s ciljem dolgoročne in regionalno zasnovane rešitve.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 6 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 52751873]

2.14 Projektna dokumentacija (idejni projekt, izvedbeni projekt)

29. BLAŽEKA, Željko, LANGERHOLC, Mojca, RAVNIK, Jure. *CERO Celje : študija variant tehnoloških postopkov.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, [2001]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55344897]

30. BLAŽEKA, Željko, ŽAJA, Sabina, LANGERHOLC, Mojca, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *CERO Celje : tehnične osnove objektov.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, [2001]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55313409]

31. BLAŽEKA, Željko, LANGERHOLC, Mojca, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *CERO Celje : tehnološke variante.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, [2001]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55346689]

32. BLAŽEKA, Željko, LANGERHOLC, Mojca, ŽAJA, Sabina, RAVNIK, Jure. *Infrastruktura za ravnanje z odpadki v Koroški regiji : idejna zasnova.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, [2001]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55347457]

33. BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, IZLAKAR, Samo, RAVNIK, Jure. *Raziskovalno kaptažni vodnjak Trnovec : tehnične osnove.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55035137]

34. ŽAJA, Sabina, BLAŽEKA, Željko, CZURDA, Duška, KRAJNC, Uroš, LANGERHOLC, Mojca, RAVNIK, Jure, ŠTELCER, Franc. *Razvojni program ravnanje z odpadki Dolenjske.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, [2002]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55347713]

35. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Tehniče osnove za določitev varstvenih pasov vodnih virov ter predlog teksta odloka o varstvenih pasovih in ukrepih za zavarovanje zalog pitne vode v Občini Selnica ob Dravi : [tehnične osnove].* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55308033]

36. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Tehnične osnove za določitev varstvenih pasov zajetij vodovodnega sistema Janka Sernca ter predlog njihove vključitve v odlok o varstvenih pasovih in ukrepih za zavarovanje zalog pitne vode v Občini Hoče-Slivnica : [tehnične osnove].* [Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002]. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55307265]

37. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Tehnične osnove za ureditev lokalnega vodovoda Janka Sernca : [tehnične osnove].* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2002. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55308289]

38. BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Raziskovalno kaptažni vodnjak Velenik : tehnične osnove.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2003. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55309057]

39. KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Strokovne podlage za dopolnitev odloka za zaščito vodnih virov v Mestni občini Maribor kot podlaga planskim dokumentom.* Maribor: Institut za ekološki inženiring, 2003. 1 zv., ilustr. [COBISS.SI-ID 55309313]

2.25 Druge monografije in druga zaključena dela

40. LAPAJNE, Slavko, OSVALD, Lojzka, VONČINA, Ernest, BABIČ, Marjana, ŠTAJNBAHER, Darinka, CENCIČ-KODBA, Zdenka, ROŠKER-ŠAJT, Andreja, JERETIN, Bogdana, REP, Pija, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure. *Meritve vplivov gradbišča AC Slivnica-Ptujska cesta na kvaliteto podtalnice in površinskih vod ter vodni režim.* Maribor: ZZV, 2000. 37 str. [COBISS.SI-ID 481567]

41. LAPAJNE, Slavko, VONČINA, Ernest, BRUMEN, Stanko, BABIČ, Marjana, OSVALD, Lojzka, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, MEZANG-NKODO, Gabriel, RAVNIK, Jure, ZADRAVEC, Draga, BAVEC, Martina, ŠKET, Ivan, POGLAJEN, Marija. *Imisijski monitoring na vodovarstvenih območjih podtalnic Vrbanski plato, Dravsko polje, Selnica-Ruše in Ceršak : zaključno poročilo.* Maribor: ZZV, 2002. 27 str. [COBISS.SI-ID 494111]

42. LAPAJNE, Slavko, BABIČ, Marjana, OSVALD, Lojzka, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, MIRKOVIČ, Nataša, ZADRAVEC, Draga, BAVEC, Martina, POGLAJEN, Marija. *Imisijski monitoring na vodovarstvenih območjih podzemnih voda Vrbanski plato, Dravsko polje, Selnica-Ruše in Ceršak : zaključno poročilo.* Maribor: ZZV, 2003. 62 str. [COBISS.SI-ID 513311]

43. ŽERJAL, Emil, ŽIGER, Mihael, LUKAN, Benjamin, SAJKO, Marjan, GLAVIČ, Marjana, BABIČ, Marjana, POGAČAR, Alenka, KÜČAN, Ladislav, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, KLEPEC, Sebastjana. *Monitoring odlagališča nenevarnih odpadkov Pobrežje : letno poročilo 2002.* Maribor: ZZV, 2003. 52 str. [COBISS.SI-ID 514591]

44. LAPAJNE, Slavko, BABIČ, Marjana, MIRKOVIČ, Nataša, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, ZADRAVEC, Draga, POGLAJEN, Marija. *Imisijski monitoring na vodovarstvenih območjih podzemnih voda Vrbanski plato, Dravsko polje, Selnica-Ruše in Ceršak za leto 2003.* Maribor: ZZV, 2004. 51 str. [COBISS.SI-ID 541727]

45. LAPAJNE, Slavko, BABIČ, Marjana, MIRKOVIČ, Nataša, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure, ZADRAVEC, Draga, POGLAJEN, Marija. *Imisijski monitoring na vodovarstvenih območjih podzemnih voda Vrbanski plato, Dravsko polje, Selnica-Ruše in Ceršak za leto 2003 : povzetek.* Maribor: ZZV, 2004. 39 str. [COBISS.SI-ID 536095]

IZVEDENA DELA (DOGODKI)

3.14 Predavanje na tuji univerzi

46. RAVNIK, Jure. *The boundary element method and the velocity-vorticity formulations of the Navier-Stokes equations : lecture presented at the Institut für Strömungsmechanik und Hydraulische Strömungsmaschinen, Universität Stuttgart, January 21st 2005.* Stuttgart, 2005. [COBISS.SI-ID 9412118]

47. RAVNIK, Jure. *Wavelet compressed boundary element method for the solution of incompressible viscous fluid flow : lecture presented at the Dipartimento di Energetica e Macchine, Universitá degli Studi di Udine, on October 4th, 2005.* Udine, 2005. [COBISS.SI-ID 9900310]

3.25 Druga izvedena dela

48. LAPAJNE, Slavko, BRUMEN, Stanko, OSVALD, Lojzka, BABIČ, Marjana, BLAŽEKA, Željko, KOPAČ, Irena, RAVNIK, Jure. *Status ogroženosti podzemne vode - področje kontaminantov : strokovne podlage za predpis vlade RS.* Maribor: ZZV: IEI, 2002. 61 str. [COBISS.SI-ID 511519]

SEKUNDARNO AVTORSTVO

Prevajalec

49. *Slovenski vodar*. Ravnik, Jure (prevajalec 2004-2006). [Celje]: Društvo vodarjev Slovenije, 1995-. ISSN 1318-6051. [COBISS.SI-ID 51373056]

50. *Ekolist*. Ravnik, Jure (prevajalec 2005). Maribor: Inštitut za ekološki inženiring, 2005-. ISSN 1854-3758. [COBISS.SI-ID 223255296]

Fotograf

51. *Slovenski vodar*. Ravnik, Jure (fotograf 2006). [Celje]: Društvo vodarjev Slovenije, 1995-. ISSN 1318-6051. [COBISS.SI-ID 51373056]

B3 Razširjeni povzetek v angleškem jeziku

This Appendix is the extended English summary of the doctoral dissertation Boundary Element Method for Velocity Vorticity based Large Eddy Simulation, presented to the Faculty of Mechanical Engineering, University of Maribor by Jure Ravnik.

Chapter 1: Introduction

Nowadays, the role of computational fluid dynamics is indispensable in the development of new devices and for studying of the underlying flow physics. In spite of fast development of computer hardware, which we are witnessing today, direct numerical simulation will not be an everyday tool for many years to come. Thus, research into numerical methods and algorithms is needed. The aim of this research is to increase the accuracy and efficiency of numerical algorithms and physical models.

In the dissertation we have introduced the velocity vorticity based large eddy simulation. We solved the governing system of nonlinear equations with the usage of wavelet compressed boundary element method in combination with the finite element method.

Chapter 2: Velocity Vorticity Formulation of Large Eddy Simulation

The second chapter starts on page 9. We begin by limiting the discussion to incompressible viscous flow of a Newtonian fluid within a Boussinesq approximation. Mass conservation (2.1), momentum transport equation (2.2) and the energy equation (2.3) in primitive variables formulation are written as a starting point of the derivation. With the introduction of nondimensional numbers in equations (2.5) through (2.9) the non-dimensional forms of momentum and temperature transport equations are written (2.10), (2.11).

Section 2.3 introduces the turbulent fluid flow through Richardson's concept of the energy cascade. The energy cascade sets the dissipation at the end of the cascade process. With the statement of Kolmogorov hypotheses, the small scales of turbulent fluid motion are believed to be of universal form, statistically isotropic and dependent solely on dissipation (Figure 2.1). With this, the basic concept of large eddy simulation is explained (Figure 2.2). A concept of filtering is introduced in an phenomenological manner. The relation of mesh spacing with the LES filter width is derived for the case of sharp spectral filter (equations (2.19) through (2.23)). A comparison between DNS and LES is made in terms of computational effort and grid density (equation (2.25), Table 2.1).

Transformation of the governing equations into the velocity vorticity formulation and filtering is explained in section 2.4, beginning on page 16. Derivation of the kinematics equation is given by equations (2.26) - (2.31). Filtering is introduced with equation (2.32). Further mathematical details on filtering are given in appendix A1, page 109. We were able to show that the filtered form of the kinematics equation (2.35) takes the same form as its non-filtered counterpart. Transformation and filtering of the momentum transport equation is given by equations (2.36) - (2.45). In order to tackle the nonlinear term, a residual vorticity vector is introduced in equation (2.41). Its contribution in the filtered vorticity transfer equation (2.45) will be modelled by a subgrid scale model. The filtered form of the energy equation is given by (2.50), where we have introduced a residual temperature vector in equation (2.49). Pressure is eliminated from the system of equations in the velocity vorticity formulation. It can be calculated in a post processing step, using the resulting velocity and vorticity fields. We have used the Poisson type equation given by equation (2.53).

Section 2.5 describes the physics behind subgrid scale modelling and proposes subgrid scale viscosity based models for the residual vorticity and temperature vectors (equation (2.54)). We are modelling subgrid scale viscosity by a local enstrophy based model; equations (2.55) and (2.56). Subgrid scale diffusivity is connected with subgrid scale viscosity via a turbulent Prandtl number (equation (2.57)). The subgrid scale model constant must be damped when approaching solid walls or it should be dynamically calculated. The derivation of the dynamic constant, based on the Germano-Lilly approach applied to the residual vorticity and temperature vectors, is proposed in subsection 2.5.1.

The final section of the second chapter summarizes the derivation of velocity vorticity based large eddy simulation by introducing the subgrid scale models into the system of equations. Thus, the filtered kinematics equation is given by equation (2.69), the filtered vorticity transport is given by equation (2.72) and the filtered energy equation is given by equation (2.73).

Chapter 3: Discrete Wavelet Transform for Vectors of Arbitrary Length

With the high grid density required by LES in mind, we have decided to use wavelet compression with the discrete form of the kinematics equation. In this chapter, which starts on page 25, we are introducing the wavelet transform for vectors of arbitrary length. It is well known that the discrete wavelet transform requires full wavelet orders to be included in the transform. Since wavelets are formed by contracting and shifting of the mother wavelet, this means that the number of wavelets up to a n-th full order is always a power of 2. Since we are compressing full matrices resulting in a BEM discrete form of the kinematics equation, the number of rows in such a matrix equals the number of boundary nodes, while the number of columns equals the number of internal nodes. Good compression is achieved by compressing both row and columns, thus in order for us to use the classical discrete wavelet transform, the number of boundary nodes and the number of domain nodes should both be a power of 2. Since this is virtually impossible to achieve and would pose great limitation on grid design, we have introduced the wavelet transform for vectors of arbitrary length, which does not have this limitation.

Equations (3.1) - (3.3) describe the algorithm of performing a discrete wavelet transform. We have been able to prove, that it is possible to expand the vector with additional components in such a manner, that the transformed vector will have the same number of zero components (equation (3.4)). The additional components are obtained by solving a M diagonal system of equations (3.6) for Daubechie wavelets with M vanishing moments.

The solution may be obtained recursively and is given in equation (3.9). Numerical analysis of the size of the additional components showed that the size increases dramatically for almost all combinations with $M > 1$. Thus we have used the Haar ($M = 1$) wavelets, were the additional components are simply duplicated vector values (equation (3.10)). Section 3.4 describes the numerical algorithm of the Haar wavelet transform for vectors of arbitrary length. Further details on the Haar wavelets may be found in appendix A9, page 122. Based on this transform, a compression algorithm for a rectangular matrix of arbitrary size is presented in section 3.5. Small elements in the transformed matrix are thresholded (equation (3.17)) and the resulting sparse matrix is written into a compressed row storage format. We have introduced the threshold as a factor of the average absolute size of all matrix elements. Tests showed, that the error made by calculating compressed matrix vector product, was approximately linearly proportional to this factor.

Chapter 4: Numerical Methods

Starting on page 33, we begin to describe the numerical methods and algorithms used to obtain the solution of a planar velocity vorticity based large eddy simulation. Large full matrices of integral values required by BEM on one side and the LES dense grid requirements forced us to develop a combined wavelet compressed BEM and FEM solution algorithm. Section 4.2 describes wavelet compressed BEM for the boundary values from the kinematics equation. Equations (4.1) - (4.16) describe the BEM derivation, while equation (4.17) - (4.19) introduce the wavelet transform. The final discrete form of the kinematics equation, which will be used to calculate the boundary vorticity values, is given by equation (4.19).

Using the new boundary values, the kinematics equation is solved again for domain velocities. It is a Poisson type equation with Dirichlet boundary conditions. Since we have more equations of this type (pressure, stream function) we have written a FEM based solution for an arbitrary function in the Appendix A12, page 132.

Both transport equations (vorticity - section 4.4 and temperature - section 4.5) are of a diffusion advection type with space and time dependent diffusivity. Boundary conditions are Dirichlet, prescribed by the user or known from the BEM solution of the kinematics equation. General FEM solution of a scalar diffusion advection equation with Dirichlet boundary conditions is given in Appendix A13, page 137.

Boundary pressure values are calculated by BEM. Derivation of the discrete form of equations is given in section 4.6. With the boundary pressure known, the domain pressure values are governed by a Poisson type equation with Dirichlet boundary conditions, which we solve by FEM.

The stream function equation (4.38) is also a Poisson type equation. Boundary values are obtained by integrating the velocity field along the boundary (4.42). FEM is used to obtain the solution. Calculation of pressure and stream function values is done outside the nonlinear iteration loop, if required.

Section 4.9 describes the solution algorithms. The matrix of integrals, which we compress by wavelets, can be calculated prior to the nonlinear iterative process, since it depends on the mesh and boundary conditions only. We have written a parallel code, which calculates the required integrals, sets up the matrix and performs the wavelet transform. Small elements of the transformed matrix are neglected and the resulting sparse matrix is written into a compressed row storage format. Communication between processors is necessary in order for each processor to be able to transform its rows and columns. Schematically, the parallel procedure is shown in Figure 4.1. Supposing $1Gb$ of RAM per processor, the required number of processors as a function of the number of nodes in the grid is given in Figure 4.2. With the compressed wavelet transformed matrix of integrals stored on disk, the nonlinear solution algorithm may start. We have proposed the serial as well as algebraically parallelized algorithms. The serial algorithm is described in subsection 4.9.2. If we suppose that velocities and temperatures are known on the boundary, the nonlinear loop starts by using wavelet compressed BEM to obtain boundary vorticity values from the kinematics equations. Domain vorticity values from the previous nonlinear iteration are used. With the boundary known, new domain velocities are obtained by solving the kinematics equation again, by FEM. With the new domain velocities, the temperature equation is solved for the new temperature field. Finally, with the new velocity and temperature fields, the new approximation for the domain vorticity field is obtained by solving the vorticity transport equation by FEM. The loop continues until convergence is achieved.

The storage requirement of the serial algorithm can be decreased by using algebraic parallelization. The BEM domain integrals matrix is divided among processors, thus enabling higher mesh densities.

Chapter 5: Validation of the Numerical Scheme on Analytical Examples and Laminar Flows

The development of numerical algorithms required several tests in order to ensure validity of simulations. We have compared the accuracy of solving heat transfer in an inhomogeneous wall (equation (5.1)) between linear and quadratic interpolation functions. Analytical solutions of the two examples considered are shown in Table 5.1. Table 5.2 shows comparison between calculated and analytical values. We established that using quadratic interpolation results in a much better estimate for the function derivatives. We have reached the same conclusion when simulating heat transfer with nonlinear diffusivity. The examples considered are presented in Table 5.3. The results are shown in Table 5.4.

Entry flow is simulated in section 5.4. Constant as well as location dependent diffusivity is considered. Analytical solutions for both cases are shown in Table 5.5. Figure 5.1 and Table 5.6 show good agreement with analytical results.

In section 5.5 we have solved a 1D time dependent diffusion equation (5.4). We have considered three implicit time schemes: backward Euler (5.5), trapez (5.6), three point second order scheme (5.7) and an explicit fourth order Runge Kutta scheme. The numerical example considered is the cooling of a rod. A triangle shape temperature distribution (equation (5.10)) is used for initial state. Analytical solution of the problem is given by (5.11). In Table 5.7 we compare temperature values using different time steps. Resulting temperature profiles are shown in Figures 5.2 and 5.3. Three point second order formula is clearly the best choice. Validity of programming was checked with the solution of the oscillation equation (5.12) in section 5.6. Table 5.8 summarizes the domain extents, boundary conditions and the analytical solutions. Very good comparison of the solution can be seen in Tables 5.9 and 5.10. Analytical and calculated profiles are shown in Figure 5.4.

Couette flow between concentrical cylinders produces Taylor's vortices. With such boundary conditions a time dependent analytical solution of the Navier-Stokes equations in 2D exists. Velocity boundary conditions are given by equations (5.15) and (5.16), while the resulting vorticity and stream function fields are (5.17) and (5.18). The comparison between analytical values and simulated values are given in Table 5.11. Reynolds number $Re = 8\pi^2$ was considered and vorticity and velocity was compared at $t = 0.5$ and $t = 1$. The flow fields are shown graphically in Figures 5.6 and 5.5.

Section 5.8 describes results of a simulation of flow over a circular cylinder. The boundary conditions are shown in Figure 5.7. The coarsest mesh is shown in Figure 5.8. Since the three mesh densities were not very dense, wavelets were not used for this test. The test proved the validity of BEM-FEM coupling algorithm and introduced the convective outflow boundary conditions. Details of the implementation of this boundary condition are shown in Appendix A6, page 118. The drag and lift coefficients (equation (5.20)) were calculated using the formulae derived in equations (5.21) - (5.26). The flow was simulated at Reynolds numbers $Ra = 20, 40, 100$. The flow field is steady at $Re = 20$ and $Re = 40$. Vorticity isolines and streamlines are shown in Figure 5.9 for $Re = 20$ and in Figure 5.10 for $Re = 40$. Comparison of the drag coefficient, recirculation length and separation angle with other authors is given in Table 5.12. At $Re = 100$ the flow is unsteady and periodic. Comparison of the drag and lift coefficients as well as the Strouhal number (equation (5.28)) is given in Table 5.13. Vorticity isolines and streamlines are shown in Figure 5.11. Figure 5.12 shows the time dependence of the drag and lift coefficients. For flow visualization we have devised a simple massless particle tracking algorithm. The algorithm is described in detail in Appendix A7 on page 119. Figure 5.13 shows the locations of massless particles in the flow field.

The parallel algorithm, used to compress the BEM matrix of integrals with wavelets, zeroes-out the elements of the wavelet transformed matrix. This is done gradually. During each zeroing-out sequence, the accuracy of matrix vector product is estimated, using random vectors and comparing the results to the product with uncompressed matrix. Section 5.9 describes this procedure. Equation (5.29) is used to estimate the relative multiplication error. The grids tested are listed in Table 5.14. The sparse structure of two of them is shown in Figure 5.15. Relative error versus the share of thresholded elements is shown in graphs on Figure 5.14. We have used the 10^{-5} relative error limit to stop the zeroing process. This limit is equal to the tolerance of the solver of linear system of equation, thus we believe using wavelet transform will not diminish the accuracy of simulations. The last statement is proved in the next two sections.

The laminar driven cavity is one of the standard benchmark examples used to validate numerical algorithms. We have used this example to test the influence of wavelet compression on the accuracy of the resulting flow field. The boundary conditions and the thresholding versus relative error curve are shown in Figure 5.16. We have tested five compression ratios ranging from 0.76 to 0.9997. Details are listed in Table 5.15. Comparison of velocity profiles for $Re = 100$, $Re = 1000$, $Re = 3200$, $Re = 5000$, $Re = 7500$, $Re = 10^4$ are shown in Figures 5.17 through 5.22. Results for all Reynolds number values show virtually no difference between profiles calculated at relative errors 10^{-5} and 10^{-6}, which confirms our hypothesis that compression up to relative error 10^{-5} does not influence the resulting flow field.

Section 5.11 describes simulation of flow over a backward facing step at $Re = 800$. The boundary conditions are shown in Figure 5.23. Simulation was performed with compression corresponding to the relative matrix vector multiplication error of 10^{-4} to 10^{-7}. Characteristic quantities, such are recirculation lengths, are compared with other authors in Tables 5.16 and 5.17. Vorticity isolines are shown in Figure 5.24, streamlines in Figure 5.25 and velocity profiles in Figure 5.26. Again, we can confirm, that compression up to relative error 10^{-5} does not effect the results.

Chapter 6: Results of Simulations

We have used the developed velocity vorticity LES numerical model to simulate natural convection in a 1 : 4 enclosure. Salat et al. [106] compared the results of modelling turbulent natural convection at high Rayleigh number between an experiment, 2D LES, 2D DNS and 3D LES computations. They reported that only minor differences are observed between the 2D and 3D results and concluded that a 2D calculation could be used as a first approximation for general flow structure in cavities at Rayleigh number about 10^{10}. 2D DNS was performed by Xin and Le Quéré [144] for an enclosure with aspect ratio 4 up to Rayleigh number based on the enclosure height 10^{10} using expansions in series of Chebyshev polynomials. This benchmark solution was used to compare our results.

The boundary conditions and mesh (only every fourth node is shown) are sketched in Figure 6.1. Details on the two meshes used are listed in Table 6.1. Simulations were performed for $Ra = 10^6$, $Ra = 10^7$, $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ and $Ra = 10^{10}$. Table 6.2 summarizes the time steps used in simulations.

Steady state temperature field for $Ra = 10^6$ and averaged temperature fields without subgrid model at $Ra = 10^7$ and LES with Piomelli damping for $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ and $Ra = 10^{10}$ are shown in Figure 6.2. While at $Ra = 10^6$ steady state is reached, at $Ra = 10^7$ the boundary layer becomes unstable and vortices are formed along the top of the hot wall and along the bottom part of the cold wall. Eddies are transported by convection up the hot wall and down the cold wall thus mixing the top and bottom parts of the enclosure. In the central part the temperature field is stratified and the flow virtually steady. The whole flow field is oscillatory and symmetric. At $Ra = 10^8$ the eddies are formed more frequently. The formation takes place in the top half of the hot wall and in the bottom half of the cold wall. The stratified central core becomes smaller, but still exists. The flow field is no longer symmetric (although the initial $Ra = 10^6$ flow field was), length scales of the structures in the flow are becoming smaller. At $Ra = 10^9$ and $Ra = 10^{10}$ the eddies are formed along the whole length of both vertical walls, most of them being formed at mid height. The central core is now thoroughly mixed and one can no longer speak of temperature stratification. The flow field includes eddies of various scales and is non-repeating, irregular and chaotic. Temperature, velocity and vertical velocity profiles are shown in Figure 6.3. Time sequences of temperature fields are shown in Figures 6.4 through 6.7.

Heat transfer was estimated using the Nusselt number (equation (6.3)). The comparison with benchmark results is given in Table 6.3 and shows good agreement. Time traces of Nusslet number are shown in graphs in Figure 6.8.

The transition from steady flow field at $Ra = 10^6$ to turbulent flow field at $Ra = 10^{10}$ was analysed with temperature time traces (Figure 6.9), temperature - vorticity phase portraits (Figures 6.10 and 6.11) and spectra (Figure 6.12). Turbulence statistics were calculated for $Ra = 10^8$, $Ra = 10^9$ (Figure 6.13) and $Ra = 10^{10}$ (Figure 6.14).

In section 6.2 we have simulated flow over a shallow cavity with heated bottom wall. The boundary and initial conditions are shown in Figure 6.15. The simulation was performed for $Re = 5000$, $Re = 10^4$ and $Re = 2 \cdot 10^4$ at $Ra = 3 \cdot 10^5$. Temperature fields along with the Nusselt number distribution along the bottom wall is shown in Figures 6.17, 6.18 and 6.20. At the highest Reynolds number considerable difference is observed between simulations without the subgrid model (Figure 6.22) and simulation with the subgrid model (Figures 6.21 and 6.23). Average heat transfer is presented in Table 6.6. Time traces of average Nusselt number and average Nusselt number distribution along the bottom wall are shown in Figures 6.17, 6.19, 6.20, 6.24 and 6.25.

Chapter 7: Conclusions

The velocity vorticity formulation of LES in combination with the wavelet transform based boundary element method presented in this dissertation shows good potential for solving turbulent fluid flow problems with the large eddy simulation approach. Solution of boundary vorticity values with wavelet based BEM provides boundary conditions for the transport equations, which we are solving by FEM. Using the wavelet transform with the boundary element method enabled us to use meshes with $\approx 2 \cdot 10^5$ nodes.

In order to be able to use the wavelet transform to compress matrices of integrals, we have developed a discrete wavelet transform for vectors of arbitrary length. The transform was developed for the Daubechie wavelet families. The best numerical stability was achieved with wavelet with one vanishing moment, namely the Haar wavelets. The developed transform was used for compression of large matrices, which were used to calculate the right hand side of a system of linear equations, resulting form the BEM discretization of the kinematics equation.

The numerical method has been thoroughly tested on various analytical examples and on high Reynolds number laminar flows. An algorithm was written, which determines the optimal wavelet compression ratio. During testing we have been able to prove that using wavelet compression does not influence the accuracy of flow simulations.

Unsteady natural convection in a 1:4 differentially heated enclosure was investigated, using large eddy simulation for Rayleigh number between $Ra = 10^7$ - 10^{10}. The flow was oscillatory at $Ra = 10^7$, while for higher Rayleigh number values it became increasingly irregular, non-repeating and chaotic. The transition to turbulent flow was investigated by studying time series plots, power spectra and vorticity - temperature phase diagrams and by calculating turbulence statistics. Heat transfer was characterized with the average Nusselt number, its time series and its relation to the Rayleigh number. The results of damped LES simulations were found in excellent agreement with the benchmark DNS results of Xin and Le Quéré [144].

The first task for future development of this work is the extension of the code to three dimensions. In this dissertation, the velocity vorticity based large eddy simulation was derived in vector form, thus all the necessary equations have already been derived. Although the extension of the code into 3D seems straightforward, we have estimated that the techniques presented in this dissertation would not enable high enough mesh density.

Further research into the discrete wavelet transform will be necessary. Using wavelets with higher number of vanishing moments would increase the compression ratio and thus decrease the storage requirements of the 3D algorithm.

Improving the efficiency of the parallel code would also help decreasing the demand on storage and CPU time.

Finally, further research into BEM, especially for the solution of the boundary, is vital for a successful transition into three dimensions.

Appendices

Appendices include in depth information on some aspects of the dissertation as well as lengthier mathematical derivations. They include: A1 introduction of filtering, A2 Gauss and Green's theorems, A3 some comments on normal and tangent, A4 interpolation functions, A5 transformation of coordinate systems, A6 implementation of convective outflow boundary condition, A7 massless particle tracking, A8 turbulent Reynolds number, A9 description and properties of the Haar wavelets, A10 derivation of fundamental solution of the Laplace equation, A11 derivation of integral statement of a Poisson type equation using BEM, A12 solution of a scalar Poisson type equation by FEM, A13 solution of a scalar diffusion advection equation by FEM and A14 explanation of the compressed row storage format.

A list of books, papers and other monographs, which were used to prepare this dissertation, is given on page 143.